GUIA MATEMÁTICA PRÁTICA 3

Guia
Matemática
Prática

MATEMÁTICA FINANCEIRA

100 páginas

EDICASE digital

Juros simples e composto
Regra de três simples e composta
Conversão de medidas de tempo
Equação do 1º grau - Porcentagem
Aplicações na calculadora HP 12C
Questões resolvidas de concursos e vestibulares

Guia Matemática Prática
ED. 03 - €2.60
7 898949 178053 3 00003

Os principais temas exigidos em todos os

EXAMES!

Expediente

EDICASE Gestão de Negócios

Direção Geral
Joaquim Carqueijó

Gestão de Canais
Vanusa Batista e Wellington Oliveira

Gestão Administrativa Financeira
Elisiane Freitas, Vanessa Pereira,
e Pedro Moura

Mídias Digitais
Clausilene Lima e Sergio Laranjeira

Distribuição em Bancas e Livrarias
Total Express Publicações (Grupo Abril)

TOTAL publicações | uma empresa Abril

EDICASE EUROPA

Sócia-gerente
Adriana Andrade
geral@edicase.pt

EDICASE publicações

Publisher
Joaquim Carqueijó

Produção Editorial
Tami Oliveira

Redação
Matilde Freitas (MTB 67769/SP)
e Saula Lima (MTB 82535/SP)

Design
Ligia Fagundes e Julio Cesar Prava

Imagens: Adobe Stock / Shutterstock

Atendimento ao Leitor
Redação
atendimento@caseeditorial.com.br

Edições Anteriores
http://loja.caseeditorial.com.br

Vendas no Atacado
(11) 3772-4303 - ramal 209
vanusa@edicase.com.br

Produto desenvolvido por:

Editora Filiada

ANER
www.aner.org.br

NOS SIGA NAS REDES SOCIAIS!

/edicasepublicacoes
/edicasepublicacoes
/edicasepublicacoes
/edicasepublic

http://loja.caseeditorial.com.br

ÍNDICE

Mais do que conhecimento sobre matemática, um examinador - seja de Concursos, Vestibulares, ENEM, etc - quer que se utilize o raciocínio para traduzir o enunciado em um cálculo matemático e resolver o problema.

Desse modo, percebemos que é a interpretação do problema, e a tradução em linguagem matemática - que antecede a resolução - que criam uma incógnita que se adequará ao seu conhecimento dos conteúdos matemáticos. Para resolver qualquer problema:

- Leia atentamente o problema até o final;
- Separe os dados fornecidos;
- Estabeleça qual é a incógnita;
- Monte uma equação que traduza o texto;
- Resolva a equação;
- Verifique se a alternativa é apresentada;
- Responda na ordem em que foi perguntado.

01. Regra de Três Simples

A **Regra de Três Simples** é o tipo de problema que envolve duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

A primeira coisa a fazer é descobrir se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, veja:

1 - Uma torneira, completamente aberta, leva 33 segundos para encher um balde de 20 litros. Quanto tempo seria necessário para essa mesma torneira encher uma piscina de 1240 litros?

Nesse problema aparecem duas grandezas: tempo para encher e capacidade de um recipiente. É fácil perceber que se **aumenta** a capacidade do recipiente (balde/piscina), **aumenta** o tempo que a torneira leva para enchê-lo. Portanto são grandezas **diretamente** proporcionais (uma grandeza **aumenta** à proporção que a outra também **aumenta**).

33 segundos — é o tempo para encher — 20 litros
x segundos — é o tempo para encher — 1240 litros

Quando as grandezas são diretamente proporcionais, multiplicamos as frações em cruz:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \mathbf{a.d = b.c}$$

$$\frac{33 \text{ segundos}}{x} = \frac{20 \text{ litros}}{1240 \text{ litros}} \rightarrow \text{multiplicando em cruz...}$$

$$\rightarrow x \,.\, 20 = 33 \,.\, 1240 \rightarrow x = \frac{33 \,.\, 1240}{20} \rightarrow x = \frac{40920}{20}$$

$x = 2046$ segundos

Resposta: Serão necessários 2046 segundos para a torneira encher a piscina de 1240 litros.

2 - Um carro, à velocidade constante de 50 km/h, vai de São Paulo ao Rio de Janeiro em 8 horas. Se o mesmo carro desenvolvesse a velocidade constante de 80 km/h, em quanto tempo faria o mesmo percurso?

Nesse problema aparecem duas grandezas: velocidade do carro e tempo de percurso. É fácil perceber que se **aumenta** a velocidade do carro, **diminui** o tempo do percurso. Portanto são grandezas **inversamente** proporcionais (uma grandeza **aumenta** à proporção que a outra **diminui**).

À — 50 km/h — o percurso é percorrido em — 8 horas
À — 80 km/h — o percurso é percorrido em — x horas

Observe que, quando as grandezas são inversamente proporcionais, invertemos uma das razões para continuar:

Diretamente Proporcionais	Inversamente Proporcionais	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$	$\rightarrow$ **a.c = b.d**

Inversamente proporcionais

$$\frac{50\text{ km/h}}{80\text{ km/h}} = \frac{8\text{ horas}}{x\text{ horas}} \rightarrow \frac{50\text{ km/h}}{80\text{ km/h}} = \frac{x\text{ horas}}{8\text{ horas}}$$

multiplicando em cruz... $\rightarrow 80 \,.\, x = 50 \,.\, 8$

$$\rightarrow x = \frac{50 \,.\, 8}{80} \rightarrow x = \frac{400}{80}$$

$x = 5$ horas

Resposta: O carro faria o percurso em 5 horas.

3 - Três torneiras iguais, completamente abertas, enchem um tanque em 2 horas e 24 minutos. Se, ao invés de 3 torneiras usássemos 5 torneiras, em quanto tempo o mesmo tanque ficaria cheio?

Mesmo raciocínio para perceber duas grandezas: número de torneiras e tempo para encher o tanque. É fácil perceber que se **aumentar** o número de torneiras, **diminui** o tempo para encher o tanque. Portanto são grandezas **inversamente** proporcionais (uma grandeza **aumenta** à proporção que a outra **diminui**).

3 torneiras — enchem o tanque em — 144 minutos
5 torneiras — enchem o tanque em — x minutos

Observe que, quando as grandezas são inversamente proporcionais, invertemos uma das razões para continuar:

Diretamente Proporcionais	Inversamente Proporcionais	
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ →	$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ →	$a.c = b.d$

Inversamente proporcionais

$$\frac{3 \text{ torneiras}}{5 \text{ torneiras}} = \frac{144 \text{ min}}{x \text{ min}} \rightarrow \frac{3 \text{ torneiras}}{5 \text{ torneiras}} = \frac{x \text{ min}}{144 \text{ min}}$$

multiplicando em cruz... → $5 \,.\, x = 3 \,.\, 144$

$$\rightarrow x = \frac{3 \,.\, 144}{5} \rightarrow x = \frac{432}{5}$$

Muito cuidado para que, nesta divisão com resto, você não forneça o resultado "86,4" pois tratam-se de minutos (86 inteiros) e segundos (resto em segundos)

$$\begin{array}{r|l} 432 & 5 \\ \hline -40 & 86 \text{ minutos} \\ 032 & \\ -30 & \\ 2 \text{ minutos} & \end{array}$$

Para continuar esta divisão devemos transformar os 2 minutos (resto) em segundos pois não são divisíveis por 5. Multiplicamos o resto por 60, continuamos:

$$\boxed{2 \text{ min} \,.\, 60 \text{ s} = 120 \text{ segundos}}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 \text{ segundos} & 5 \\ \hline -10 & 24 \text{ segundos} \\ 020 & \\ -20 & \\ 0 & \end{array}$$

x = 86 minutos e 24 segundos

Resposta: Serão necessários 86 minutos e 24 segundos para as 5 torneiras encherem o tanque.

02. Conversão de Medidas de Tempo

Como visto no exemplo anterior, é importante conhecer as conversões de medidadas de tempo para não se equivocar nas respostas e cálculos.

Quando alguém diz "duas horas e meia" entendemos que quer dizer 2 horas e "meia hora" ou 2 horas e 30 minutos, portanto, em Matemática não podemos escrever 2,5 horas que seria o resultado de 5 horas dividido por 2.

CONVENÇÃO

1 hora equivale a **60 minutos**
1 minuto equivale a **60 segundos**

Divisão do Tempo	Símbolo	Equivalência	1 Dia
Hora	h	1 h	24 hs
Minuto	min	60 min	1.440 min
Segundo	s	3.600 s	86.400 s

24 horas	Semana	Mês	Ano
1 dia	7 dias	30 dias	365 dias

03. Regra de Três Composta

A **Regra de Três Composta** é o tipo de problema que envolve <u>três ou mais grandezas</u> diretamente ou inversamente proporcionais.

A primeira coisa a fazer é identificar as grandezas e montar a relação entre elas para analisar quais são <u>diretamente</u> ou <u>inversamente</u> proporcionais, veja:

1 - Para alimentar 50 roedores durante 15 dias são necessários 90 kg de ração. Quantos roedores é possível alimentar em 20 dias com 180 kg de ração?

Nesse problema aparecem três grandezas: quantidade de roedores, tempo e quantidade de ração. Com as informações fornecidas podemos montar o seguinte esquema:

50 roedores	– se alimentam com –	90 kgs	– durante	15 dias
x roedores	– se alimentam com –	180 kgs	– durante	20 dias

Agora vamos analisar as grandezas separadamente duas à duas para saber qual a relação (diretamente ou inversamente) de proporção entre elas:

Quantidade de roedores X quantidade de ração
Quanto **maior** a quantidade de roedores, **maior** a quantidade de ração necessária. **Mais** roedores comendo, **mais** comida. Como as palavras maior e maior estão presentes as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Quantidade de roedores X tempo
Quanto **maior** a quantidade de roedores, **menor** o tempo que durará a ração. **Mais** roedores comendo, **menos** tempo dura a comida. Como as palavras maior e menor estão presentes as grandezas são **inversamente proporcionais**.

Observação: Analisamos as grandezas sempre em torno da incógnita (x) que neste caso são a quantidade de roedores.

Portanto, com essa análise, podemos montar o real esquema, invertendo a fração que é inversamente proporcional:

$$\frac{50 \text{ roedores}}{x \text{ roedores}} = \frac{90 \text{ kgs}}{180 \text{ kgs}} \cdot \frac{20 \text{ dias}}{15 \text{ dias}}$$

Na primeira fração fica sempre a incógnita (x) e nas outras duas razões multiplicamos não esquecendo de inverter os dias.

Finalmente resolvemos a proporção:

$$\rightarrow \frac{50}{x} = \frac{90\ .\ 20}{180\ .\ 15} \rightarrow \frac{50}{x} = \frac{1800}{2700} \rightarrow x\ .\ 1800 = 50\ .\ 2700$$

$$\rightarrow x = \frac{50\ .\ 2700}{1800} \rightarrow x = \frac{135000}{1800} \rightarrow x = 75 \text{ roedores}$$

Resposta: É possível alimentar **75 roedores** em 20 dias com 180 kg e ração.

2 - Um trem, à velocidade de 80 km/h, percorre 400 km em 5 horas. Se o trem desenvolver a velocidade de 100 km/h durante 7 horas, que distância irá percorrer?

Nesse problema aparecem três grandezas: velocidade do trem, distância e tempo. Com as informações fornecidas podemos montar o seguinte esquema:

400 km são percorridos em 5 h com velocidade de 80 km/h
x km são percorridos em 7 h com velocidade de 100 km/h

Agora vamos analisar as grandezas separadamente duas à duas para saber qual a relação (diretamente ou inversamente) de proporção entre elas:

Velocidade do trem X distância
Quanto **maior** a velocidade do trem, **maior** a distância percorrida. Quanto **mais** você anda **mais** distância percorre. Para esse raciocínio, o tempo fica fixo. Portanto são razões **diretamente proporcionais**.

Distância X tempo
Quanto **maior** a distância, **maior** o tempo que gastará para percorrê-la. **Mais** longe, **mais** tempo dura o percurso. Como as palavras maior e maior estão presentes as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Observação: Veja mais uma vez que analisamos as grandezas sempre em torno da incógnita (x) que neste caso é a distância.

Portanto, com essa análise, podemos montar o real esquema:

$$\frac{400\ \text{km}}{x\ \text{km}} = \frac{5\ \text{h}}{7\ \text{h}} \cdot \frac{80\ \text{km/h}}{100\ \text{km/h}}$$

Na primeira fração fica sempre a incógnita (x) e nas outras duas razões multiplicamos. Neste caso não há inversão pois não existem grandezas inversamente proporcionais.

Resolvendo a proporção:

$$\rightarrow \frac{400}{x} = \frac{5\ .\ 80}{7\ .\ 100} \rightarrow \frac{400}{x} = \frac{400}{700} \rightarrow x\ .\ 400 = 400\ .\ 700$$

$$\rightarrow x = \frac{400\ .\ 700}{400} \rightarrow x = \frac{280000}{400} \rightarrow x = 700\ \text{km}$$

Resposta: O trem irá percorrer 700 km à velocidade de 100 km/h durante 7 horas.

3 - Se 4 operários, trabalhando 8 horas por dia, levantam um muro de 30 m de comprimento em 10 dias, qual o comprimento do muro (com a mesma largura e altura do anterior) que 6 operários erguerão em 8 dias, trabalhando 9 horas por dia?

Nesse problema aparecem quatro grandezas: número de operários, horas por dia, comprimento do muro e dias trabalhados. Com as informações fornecidas podemos montar o seguinte esquema (veja que colocamos a grandeza da incógnita sempre primeiro):

$$\frac{30\ \text{m}}{x\ \text{m}}\ \text{são construídos por}\ \frac{4\ \text{operários}}{6\ \text{operários}}\ \text{trabalhando}\ \frac{8\ \text{h/dia}}{9\ \text{h/dia}}\ \text{por}\ \frac{10\ \text{dias}}{8\ \text{dias}}$$

Agora vamos analisar as grandezas separadamente duas à duas para saber qual a relação (diretamente ou inversamente) de proporção entre elas. Sempre em torno da incógnita (x) que neste caso são é o comprimento do muro:

Operários X comprimento do muro
Quanto **maior** o número de operários, **maior** o comprimento do muro. **Mais** operários trabalhando, **mais** muro construido. Como as palavras maior e maior estão presentes as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Hora por dia X comprimento do muro
Quanto **maior** as horas por dia trabalhada, **maior** o comprimento do muro. **Mais** horas por dia trabalhando, **mais** muro construido. Como as palavras maior e maior estão presentes as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Dias trabalhados X comprimento do muro
Quanto **maior** o tempo trabalhado (dias), **maior** o comprimento do muro. **Mais** dias trabalhando, **mais** muro construido. Como as palavras maior e maior estão presentes as grandezas são **diretamente proporcionais**.

Portanto, com essa análise, podemos montar o real esquema:

$$\frac{30\text{ m}}{x\text{ m}} = \frac{4\text{ operários}}{6\text{ operários}} \cdot \frac{8\text{ h/dia}}{9\text{ h/dia}} \cdot \frac{10\text{ dias}}{8\text{ dias}}$$

Não há grandezas inversamente proporcionais.

Resolvendo a proporção:

$$\rightarrow \frac{30}{x} = \frac{4 \,.\, 8 \,.\, 10}{6 \,.\, 9 \,.\, 8} \quad \rightarrow \frac{30}{x} = \frac{320}{432} \quad \rightarrow x \,.\, 320 = 30 \,.\, 432$$

$$\rightarrow x = \frac{30 \,.\, 432}{320} \quad \rightarrow x = \frac{12960}{320} \quad \rightarrow x = 40{,}5\text{ km}$$

Resposta: 6 operários, trabalhando 9 h/dia erguerão **40,5 km de muro** em 8 dias.

04. Porcentagem

Porcentagem, como o próprio nome diz, é "por cem" (sobre 100). É o valor obtido quando aplicamos uma razão centesimal (razão com denominador 100) a um determinado valor. Veja as formas de representar:

$54/100 \rightarrow \dfrac{54}{100} \rightarrow 0{,}54 \rightarrow 54\% \rightarrow$ cinquenta e quatro porcento

---

$140/100 \rightarrow \dfrac{140}{100} \rightarrow 1{,}40 \rightarrow 140\% \rightarrow$ cento e quarenta porcento

As questões envolvendo porcentagem são resolvidas usando regra de três simples e diretamente proporcionais, veja os casos clássicos:

1 - Em uma cidade, a entrada de um circo passou de R$ 16,00 para R$ 24,00. Qual o porcentual de aumento?

A entrada original R$ 16,00 representa **100%**. Passou a custar R$ 24,00, ou seja, aumentou **R$ 8,00** (R$ 24,00 - R$ 16,00). O problema quer saber qual é esse valor de aumento, só que em **porcentagem**.

Com a regra de três simples diretamente proporcional obtemos:

$$\text{Se } \frac{\text{R\$ } 16}{\text{R\$ } 8} \ \frac{\text{representa}}{\text{representa}} \ \frac{100\%}{x\ \%}$$

Multiplicando em cruz... $\rightarrow \dfrac{16}{8} = \dfrac{100}{x}$

$$\rightarrow x \cdot 16 = 8 \cdot 100 \rightarrow x = \frac{8 \cdot 100}{16} \rightarrow x = \frac{800}{16} \rightarrow x = 50\%$$

Resposta: A entrada do circo aumento **50%**.

2 - Em uma escola de inglês, 38% dos alunos são meninas e os meninos representam 155. Qual é o número total de alunos?

Se 38% são as alunas, então os alunos são os outros 62% (100% - 38%). Com isso podemos montar o esquema novamente com a a regra de três simples diretamente proporcional:

Se 155 é o valor que representa 62% dos alunos,
x é o valor que representa 100% , ou seja, o total.

Multiplicando em cruz... $\rightarrow \frac{155}{x} = \frac{62}{100}$

$\rightarrow x.62 = 155.100 \rightarrow x = \frac{155.100}{62} \rightarrow x = \frac{15500}{62} \rightarrow x = 250$

Resposta: A escola tem **250 alunos** no total.

3 - Uma pessoa lhe vende uma peça por R$ 15.000,00. Sabendo que essa pessoa lucrou 20% sobre o preço de compra, por quanto havia comprado tal peça?

Queremos saber o preço de compra (x) que representa 100%. Se o preço de venda é R$ 15.000,00, ele representa os 100% mais os 20% de lucro do vendedor, portanto 120% (100% + 20%). Com isso montamos nosso esquema:

Se x é o valor que representa 100% do preço,
15000 é o valor que representa 120% , preço + lucro.

Multiplicando em cruz... $\rightarrow \frac{x}{15000} = \frac{100}{120}$

$\rightarrow x.120 = 15000.100 \rightarrow x = \frac{15000.100}{120} \rightarrow x = 12.500,00$

Resposta: A pessoa comprou a peça por **R$ 12.500,00**.

05. Juro Simples

É o valor pago unicamente sobre o **capital inicial** sendo diretamente proporcional a esse capital e o tempo em que está aplicado. Ou seja, são acréscimos somados ao capital inicial no fim da aplicação. É representado pela fórmula genérica:

J é o **Juro** $\boxed{J = C.i.t}$ **C** é o **Capital inicial**
i é a **Taxa de juro**
t é o **Tempo**

Assim a simbologia fica estabelecida em porcentagem (sobre 100) e devemos sempre mencionar a unidade de tempo (12% ao ano ou 2% ao mês, etc).

Devemos lembrar ainda que é chamado de **Montante**, a soma de Capital inicial + Juro do período.

1 - Uma pessoa lhe empresta R$ 2.000,00, a juro simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 3% ao mês. Quais os juros produzidos?

Capital inicial = R$ 2.000,00
Tempo = 3 meses
Taxa (i) = 3% ao mês ou

Na Taxa lemos 3 por cento o que significa:

$3\% = 3 \text{ por cento} = 3 \text{ por } 100 = \frac{3}{100} = \boxed{0{,}03}$

Aplicando a fórmula: J = R$ 2.000 . 0,03 . 3 meses

J = 2.000 . 0,03 . 3 → **J = R$ 180,00** de juro em 3 meses

Veja que, se fizermos a conta mês a mês, o valor do juro será de R$ 60,00 por mês. Esse valor será somado mês a mês, não muda.

O Montante à ser devolvido após 3 meses será **R$ 2.180,00**.

2 - Quais os juros de R$ 90.000,00 em 1 ano, 5 meses e 20 dias, a 8% ao mês?

C = 90.000
i = 8% ao mês ou $\frac{8}{100}$ = 0,08 ao mês ou $\frac{0,08}{30 \text{ dias}}$ ao dia.
t = 1 ano, 5 meses e 20 dias ou 365 + (5 . 30) + 20 dias = 530 dias

Observe que deixamos tudo na mesma unidade de tempo: dias

Aplicando a fórmula: **J = C.i.t**

$J = R\$\ 90.000 \cdot \frac{0,08}{30}$ ao dia . 530 dias

$J = \frac{90.000}{1} \cdot \frac{0,08}{30} \cdot \frac{530}{1} \rightarrow \frac{3.816.000}{30} \rightarrow J = 127.200$

Resposta: Juros de **R$ 127.200,00**

3 - O capital que rendeu R$ 13.050,00 em 3 meses, à taxa de 0,58% ao mês é?

J = R$ 13.050,00
C = ?
i = 0,58% ao mês ou = 0,0058.
t = 3 meses

Observe que o índice em porcentagem é sempre transformado em número decimal (0,58 : 100 = 0,0058).

Aplicando a fórmula: **J = C.i.t** → R$ 13.050 = C . 0,0058 . 3

$13.050 = C.\ 0,0174 \rightarrow C = \frac{13.050}{0,0174} \rightarrow C = R\$\ 750.000,00$

Resposta: O capital é **R$ 750.000,00**

4 - Um capital foi aplicado a juro simples e, ao completar um período de 1 ano e 4 meses, produziu um montante equivalente a 7/5 de seu valor. A taxa mensal dessa aplicação foi de:

Montante (M) = J + C = $\frac{7C}{5} \rightarrow J = \frac{7C}{5} - C \rightarrow J = \frac{7C}{5} - \frac{5C}{5}$

$\rightarrow J = \frac{7C - 5C}{5} \rightarrow \boxed{J = \frac{2C}{5}}$

Separando as informações (e convertendo, se necessário):

$J = \frac{2C}{5}$

C = ?

i = ? % ou "por cem" (:100) ou $\frac{i}{100}$

t = 1 ano e 4 meses = 12 meses (1 ano) + 4 meses = 16 meses

Aplicando a fórmula: **J = C.i.t** temos: $\boxed{\frac{2C}{5} = \frac{C}{1} \cdot \frac{i}{100} \cdot \frac{16}{1}}$

$\rightarrow \frac{2C}{5} = \frac{C \cdot i \cdot 16}{100} \rightarrow \frac{2C}{5} = \frac{16C \cdot i}{100} \rightarrow 2C.100 = 5.16C.i$

$\rightarrow 200C = 80C \cdot i \rightarrow \frac{200C}{80C} = i \rightarrow i = \frac{200\cancel{C}}{80\cancel{C}} \rightarrow i = 2,5$

Resposta: A taxa mensal deste capital foi de **2,5%**

Observe que as questões com juros envolvem conversões de tempo (ano, mês, dia) em que será dada a resposta e de porcentagem em número decimal. Fique atento às respostas quando forem de múltipla escolha pois podem lhe informar, por exemplo, a unidade de tempo economizando conversões desnecessárias.

06. Juro Composto

São acréscimos somados ao capital ao final de cada período de aplicação gerando com esta soma um novo capital. É o famoso **juros sobre juros** cobrado por praticamente todo o comércio lojista. É representado pela fórmula genérica:

M é o **Montante** — $\boxed{M = C \cdot (1 + i)^t}$

C é o **Capital inicial**
i é a **Taxa de juro**
t é o **Tempo ou período**

Para facilitar o entendimento veja a tabela abaixo mostrando a evolução do juro composto sobre o capital inicial R$ 1.000,00 acompanhado mês à mês por 6 meses à uma taxa de 8% ao mês. Observe:

Tempo	Capital	Índice	Montante		Novo Capital
Mês inicial	1.000,00	8% por mês	1.000,00	+ (C . 0,08)	Novo Capital
1º Mês	1.000,00	8% por mês	1.000,00	+ 80	1.080,00
2º Mês	1.080,00	8% por mês	1.080,00	+ 86,4	1.166,40
3º Mês	1.166,40	8% por mês	1.166,40	+ 93,31	1.259,71
4º Mês	1.259,71	8% por mês	1.259,71	+ 100,77	1.360,48
5º Mês	1.360,48	8% por mês	1.360,48	+ 108,83	1.469,31
6º Mês	1.469,31	8% por mês	1.469,31	+ 117,54	1.586,85

Repare que o juro é aplicado sempre sobre o montante do mês anterior ou novo capital. A cada mês um novo capital é gerado.

Se aplicássemos a fórmula: $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 1.000 \cdot (1 + 8\%)^6 \rightarrow 1.000 \cdot (1 + 0{,}08)^6 \rightarrow 1.000 \cdot (1{,}08)^6$

$\rightarrow 1.000 \cdot 1{,}58687 \rightarrow \mathbf{M = 1.586{,}87}$

Observe que a diferença de centavos se deve às casas decimais consideradas. No caso da tabela, apenas 2 casas após a vírgula.

Considerando o mesmo exemplo 1 (da página 14) de Juro Simples, veja como fica com Juro Composto:

1 - Uma pessoa lhe empresta R$ 2.000,00, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 3% ao mês. Quais os juros produzidos?

Capital inicial (C) = R$ 2.000,00
Tempo (t) = 3 meses
Taxa (i) = 3% ao mês ou 0,03 ao mês

Observe que continuamos com as conversões no caso de tempo e porcentagem da taxa. Fique atento pois é nessas conversões que o examinador tenta lhe enganar.

Aplicando a fórmula: $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 2000 \cdot (1 + 0{,}03)^3 \rightarrow = 2000 \cdot (1{,}03)^3 \rightarrow = 2000 \cdot 1{,}09$

$M =$ R$ 2.185,45

Resposta: Cuidado aqui! O examinador perguntou quais os juros produzidos, portanto é o Montante **R$ 2.185,45** menos o Capital Inicial **R$ 2.000,00**. Ao final do empréstimo, pagará **R$ 185,45** de juros.

Comparando com o mesmo caso, só que à Juro Simples (página 14) temos:

Juro	1º mês	2º mês	3º mês	Total
Simples	60,00	60,00	60,00	R$ 180,00
Composto	60,00	61,80	63,65	R$ 185,45

Ao seja, o juros sobre juros (Juro Composto) faz o montante crescer de maneira evolutiva baseado sempre em um novo capital (do mês anterior). Já o Juro Simples seria um juro fixo mês à mês ou calculado para um período inteiro.

2 - Qual o juro pago no caso do empréstimo de R$ 2.000,00 à taxa de 5% ao mês e pelo prazo de 3 meses?

Capital inicial (C) = R$ 2.000,00
Tempo (t) = 3 meses
Taxa (i) = 5% ao mês ou 0,05 ao mês

Aplicando a fórmula: $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 2000 \cdot (1 + 0{,}05)^3 \rightarrow = 2000 \cdot (1{,}05)^3 \rightarrow = 2000 \cdot 1{,}1576$

$M = 2.315{,}20$ (aproximadamente pois usamos 4 casas decimais após a vírgula)

Resposta: Cuidado aqui! O examinador perguntou qual o juro pago, portanto é o Montante **R$ 2.315,20** menos o Capital Inicial **R$ 2.000,00** restando **R$ 315,20 de juros**.

3 - Qual o juro pago no caso do empréstimo de R$ 1.000,00 à taxa de juro de 2% ao mês e pelo prazo de 10 meses?

Capital inicial (C) = R$ 1.000,00
Tempo (t) = 10 meses
Taxa (i) = 2% ao mês ou 0,02 ao mês

Aplicando a fórmula: $M = C \cdot (1 + i)^t$

$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}02)^{10} \rightarrow = 1000 \cdot (1{,}02)^{10}$

$\rightarrow = 1000 \cdot 1{,}21899 \rightarrow M = 1.218{,}99$

Resposta: Cuidado aqui! O examinador perguntou qual o juro pago, portanto é o Montante **R$ 1.218,99** menos o Capital Inicial **R$ 1.000,00** restando **R$ 218,99 de juros**.

Observe que, nesta questão, é muito trabalhoso calcular $(1{,}02)^{10}$ gastando tempo precioso para uma única questão. Multiplicar 1,02 por ele mesmo 10 vezes gera um resultado gigantesco: 1,2189944199947571 3024. Neste tipo de questão o resultado desta potência provavelmente será fornecido mas o cálculo é aproximado pois possui muitas casas decimais após a vírgula.

4 - Um computador foi vendido da seguinte forma:

- entrada de R$ 500,00;
- uma parcela de R$ 900,00 a ser paga no mês seguinte, com juros de 2% ao mês;
- os R$ 1.200,00 restantes a serem pagos após 2 meses da data da compra, a juros compostos de 3% ao mês.

Ao final, desprezando os centavos, quanto o comprador terá pago pelo computador?

Problema envolvendo juro simples e composto, veja:

1ª parcela de R$ 500,00. Não ocorre juro. $\longrightarrow$ R$ 500

2ª parcela de R$ 900,00 à juro simples:

Capital inicial (C) = R$ 900,00
Tempo (t) = 1 mês
Taxa (i) = 2% ao mês ou 0,02

Aplicando a fórmula: $\boxed{J = C \,.\, i \,.\, t}$

$J = 900 \,.\, 0{,}02 \,.\, 1 \rightarrow J = 18$

Montante (M) = R$ 900,00 (C) + R$ 18,00 (J) $\longrightarrow$ R$ 918

3ª parcela de R$ 1.200,00 à juro composto:

Capital inicial (C) = R$ 1.200,00
Tempo (t) = 2 meses
Taxa (i) = 3% ao mês ou 0,03

Aplicando a fórmula: $\boxed{M = C \,.\, (1 + i)^t}$

$M = 1200 \,.\, (1 + 0{,}03)^2 \rightarrow = 1200 \,.\, (1{,}03)^2$

$\rightarrow = 1200 \,.\, 1{,}0609 \rightarrow M = \text{R\$ } 1.273{,}08 \longrightarrow \text{R\$ } 1.273$

Resposta: Somando as parcelas (500+918+1273) = **R$ 2.691**

07. Equação do 1º Grau

Equação é uma sentença que contém uma ou mais incógnita (número desconhecido) expressa por uma igualdade. A solução da incógnita é o número que transforma a equação em sentença verdadeira. A solução de uma equação é chamada de raiz. Na equação do 1º grau o maior expoente da incógnita é igual a 1 (qualquer número elevado a 1 é igual a ele mesmo). Exemplo:

$$\boxed{5x - 2 = 3x + 4}$$

1º membro da igualdade

Igualdade

2º membro da igualdade

Incógnita ➔ (x)

A incógnita pode existir apenas de um lado da igualdade (ou equação) ou em ambos os lados como este exemplo.

Resolvendo uma equação de 1º grau

Primeiro passo: deixar a incógnita (x) sozinha no primeiro membro da igualdade. Para isso devemos transferir os outros números para o segundo membro da igualdade, veja:

1 - Caso com incógnita apenas de um lado:

$$\underbrace{3x - 2 = 7}_{\text{Equação do 1º grau}} \rightarrow 3x = +7 + 2 \rightarrow 3.x = +9 \rightarrow x = +9:3 \rightarrow x = +3$$

Apesar de oculto, os sinais devem ser vistos pois ao passar a igualdade o sinal é invertido. O que está somando, passa subtraindo. O que está multiplicando, passa dividindo. E vice-versa.

O 2 está subtraindo. Então passa a igualdade somando;
O 3 está multiplicando. Então passa a igualdade dividindo.

A raiz da equação “3x - 2 = 7” é “3” pois substituindo o “x” por “3” (3.3 - 2 = 7 ► 9 - 2 = 7 ► 7 = 7) a sentença é verdadeira.

2 - Caso com incógnita de ambos os lados:

Continuamos a passar todos os membros com x para o primeiro membro da igualdade, veja:

$5x - 2 = 3x + 4$ ➡ $+5x - 2 = +3x + 4$ ➡ $+5x - 3x = +4 + 2$

Equação do 1º grau

O - 2 que está subtraindo, passa a igualdade somando;
O 3x que está somando, passa a igualdade subtraindo.

➡ $+2x = +6$ O que multiplica, passa dividindo ➡ $x = 6 : 2$ ➡ $x = 3$

A raiz da equação é "3" pois substituindo o "x" por "3" ($5.3 - 2 = 3.3 + 4$ ► $15 - 2 = 9 + 4$ ► $13 = 13$) a sentença é verdadeira.

3 - Caso com parênteses e multiplicando de x negativo:

A prioridade é eliminar os parêntese:

$2 - 3(2x + 1) = 5x + 2(4x - 3)$

Equação do 1º grau

➡ $2 - 6x - 3 = 5x + 8x - 6$

➡ $+2 - 6x - 3 = +5x + 8x - 6$

➡ $- 6x - 5x - 8x = - 6 - 2 + 3$

➡ $- 19x = - 5$

Aqui usamos a propriedade distributiva da multiplicação não esquecendo das regras dos sinais para multiplicação (sinais iguais = positivo; sinais diferentes = negativo)

$- 3(2x + 1)$ leia:

$- 3 . +2x$ e $- 3 . +1$

$- 6x$ e $- 3$

$+ 2(4x - 3)$ leia:

$+ 2 . +4x$ e $+ 2 . - 3$

$+ 8x$ e $- 6$

Quando o número na frente do "x" está negativo multiplicamos a equação por (-1). Isso troca o sinal do primeiro e do segundo membro da equação. Veja:

➡ $- 19x . (-1) = - 5 . (-1)$

➡ $+ 19x = + 5$ ➡ $x = 5 : 19$ ou a fração $\frac{5}{19}$

A raiz da equação é "5/19" pois se substituirmos o "x" por "5/19" a igualdade será verdadeira.

08. Tradução Matemática

Os problemas de matemática compõem a maioria das questões desta disciplina em exames, para traduzir o enunciado em dados matemáticos, veja os siginificados:

Um número: x
O dobro de um número: $2.x$
O dobro de um número mais um: $2.x + 1$
A terça parte de um número: $x \div 3$ ou a fração $\frac{x}{3}$
O quádruplo de um número: $4.x$
O quintuplo de um número: $5.x$
O quádruplo da terça parte de um número: $4.(x \div 3)$
O quintuplo do dobro da terça parte de um número: $5.2.(x \div 3)$
O quadrado de um número: x^2
O quadrado de um número mais o dobro do número: $x^2 + 2.x$
A raiz quadrada de um número: $\sqrt{x}$
A raiz quadrada do triplo de um número: $\sqrt{3x}$
A soma de dois números consecutivos: $x + (x + 1) = 18$
A soma de dois números pares consecutivos: $x + (x + 2)$

1 - Somando 20 kg ao dobro do peso de Lívia obtemos 136 kg. Quanto Lívia pesa?

Peso de Lívia: $x \rightarrow 20 \text{ kg} + 2x = 136 \text{ kg}$

2 - Subtrair 3 anos do triplo da idade de João é igual a adicionarmos 5 anos ao dobro da idade dele. Que idade tem ele?

Idade de João: $x \rightarrow 3x - 3 = 2x + 5$

3 - São 46 balas para serem repartidas entre Caio, Enzo e Pietro. Caio deve receber 3 balas a mais que Enzo, e Enzo, 2 balas a mais que Pietro. Quantas balas recebe cada um?

Balas Caio: $x + (3 + 2)$, Balas Enzo: $x + 2$, Balas Pietro: x

$\rightarrow x + 5 + x + 2 + x = 46$

09. Questões

1. (METRÔ/SP - Agente de Segurança) Em um relatório sobre as atividades desenvolvidas em dado mês pelos funcionários lotados em certa estação do Metrô, foi registrado que:

- 25% do total de funcionários eram do sexo feminino e que, destes, 45% haviam cumprido horas-extras;
- 60% do número de funcionários não cumpriam horas-extras;
- 70 funcionários não cumpriam horas-extras.

Com base nessas informações, nesse mês, o total de funcionários lotados em tal estação era:

a) 120
b) 150
c) 160
d) 180
e) 190

2. (METRÔ/SP - Agente de Segurança) Sobre os usuários de uma Estação de Metrô que ao longo de certo mês foram atendidos por um Agente, sabe-se que: 5% do total foram abordados em casos de transgressão no sistema e 16% do número restante, no auxílio do embarque e desembarque. Nessas condições, o número de pessoas para as quais esse Agente prestou quaisquer outros tipos de atendimento corresponde a que porcentagem do total de usuários dessa Estação nesse mês?

a) 59,6%
b) 68%
c) 68,4%
d) 79%
e) 79,8%

3. (ATE II - Prefeitura de São Paulo) Numa secretaria, 10 pessoas, trabalhando com o mesmo ritmo e cada um em seu PC, durante 10 dias, com 8 horas de trabalhos diários digitam 650 boletins de notas. Quantas pessoas, nas mesmas condições, serão necessárias para digitar 1300 boletins em 8 dias, trabalhando 4 horas por dia?

a) 8
b) 12
c) 25
d) 40
e) 50

4. (TAC - Escrevente Judiciário) Numa gráfica, 5 máquinas de mesmo rendimento imprimem um certo número de cópias em 8 horas de funcionamento. Se duas delas quebrassem, em quanto tempo de funcionamento as máquinas restantes fariam o mesmo serviço?

a) 4 horas e 8 minutos
b) 13 horas e 30 minutos
c) 13 horas e 20 minutos
d) 4 horas e 48 minutos
e) 13 horas e 1 minuto

5. (TAC - Escrevente Judiciário) Uma pessoa digitando a 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza um certo trabalho em 10 dias. Outra pessoa, digitando a 50 toques por minuto e trabalhando 4 horas por dia, realizará o mesmo trabalho em quantos dias?

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 15

6. (TJ/SP - Escrevente Judiciário) Um construtor utilizando 16 operários trabalhando 6 horas por dia constroe uma determinada obra em 180 dias. Quantos operários deverá utilizar para fazer a mesma obra trabalhando 8 horas por dia no prazo de 120 dias?

a) 13
b) 17
c) 16
d) 15
e) 18

7. (Técnico Previdenciário do INSS) Um aparelho de som pode ser comprado em 4 prestações de R$ 150,00 ou à vista com 10% de desconto. Quanto será pago, em reais, se a compra for feita à vista?

a) 480,00
b) 500,00
c) 520,00
d) 540,00
e) 560,00

8. (Assistente de Administração) Uma imobiliária vendeu 60% dos apartamentos de um prédio residencial. Dos apartamentos vendidos, 80% foram financiados. Sabendo que foram financiados 24 apartamentos, o número total de apartamentos do prédio é:

a) 46
b) 48
c) 51
d) 52
e) 50

9. (Técnico Previdenciário do INSS) Do total de funcionários da empresa Fios S/A, 20% são da área de informática e outros 14% ocupam os 21 cargos de chefia. Quantos funcionários dessa empresa NÃO trabalham na área de informática?

a) 30
b) 99
c) 110
d) 120
e) 130

10. (ATE II - Prefeitura de São Paulo) Uma prova de seleção foi aplicada em uma escola para recursos extracurriculares: informática e mecânica. Sobre os candidatos, sabe-se que:
- cada candidato só pode realizar prova para um curso;
- 40% dos candidatos optaram por mecânica;
- 35% dos candidatos eram mulheres;
- 50% dos candidatos para informática eram homens;
- 300 mulheres optaram por informática.
Quantos candidatos homens optaram por informática?

a) 300
b) 350
c) 500
d) 600
e) 650

11. (Assistente de Administração) Num concurso passaram 12% dos candidatos que fizeram as provas. Dos 17.500 candidatos inscritos, 8% faltaram às provas. Qual o número de candidatos aprovados?

a) 1632
b) 1992
c) 1932
d) 1762
e) 1867

12. (FCC - MPE - Agente Administrativo) Devido a uma promoção, um televisor está sendo vendido com 12% de desconto sobre o preço normal. Cláudio, funcionário da loja, está interessado em comprar o televisor. Sabendo que, como funcionário da loja, ele tem direito a 25% de desconto sobre o preço promocional, o desconto que Cláudio terá sobre o preço normal do televisor, caso decida adquiri-lo, será de:

a) 37%
b) 36%
c) 35%
d) 34%
e) 33%

13. (Polícia Rodoviária Federal) Uma pesquisa realizada na Grã-Bretanha mostrou no primeiro semestre deste ano 295 doentes cardíacos precisaram de transplantes, mas só 131 conseguiram doadores. O percentual aproximado de pacientes que não conseguiram transplante é:

a) 31%
b) 36%
c) 44%
d) 56%
e) 30%

14. (TJ - Auxiliar Judiciário) Que abatimento obtive no pagamento de R$ 600,00, se, ao pagar à vista ganhei um desconto de 3%?

a) R$ 1,80
b) R$ 36,00
c) R$ 18,00
d) R$ 3,60
e) R$ 16,30

15. (Oficial de Promotoria) Um certo capital foi aplicado a juro simples durante 8 meses, gerando um montante de R$9.600,00. Esse montante foi novamente aplicado por mais 4 meses, à mesma taxa de juro da aplicação anterior, e gerou R$ 960,00 de juros. O capital inicialmente aplicado foi:

a) R$ 7.000,00
b) R$ 7.500,00
c) R$ 7.800,00
d) R$ 7.900,00
e) R$ 8.000,00

16. (SPTRANS) Um pequeno investidor aplicou R$ 5.000,00 a uma taxa de juro simples de 2,2% ao mês. Para que ele tenha um rendimento de R$ 1.650,00, esse capital deverá ficar aplicado durante:

a) 10 meses
b) 1 ano
c) 1 ano e 3 meses
d) 1 ano e 4 meses
e) 1 ano e 5 meses

17. (CESGRANRIO - Técnico de Arquivo) Uma loja oferece duas opções de pagamento na compra de uma bicicleta: R$ 200,00 à vista, ou a prazo, em duas prestações mensais iguais de R$ 120,00, sendo a primeira delas paga no ato da compra. Tomando-se a opção de pagamento à vista como referência, a taxa mensal de juros cobrada pela loja na venda a prazo é:

a) 20%
b) 25%
c) 40%
d) 50%
e) 60%

18. (FCC - Assistente Administrativo) Um trabalhador aplicou seu 13º salário a juro simples e à taxa mensal de 3%; e ao fim do prazo de aplicação o montante era de R$ 1.204,60. Se o valor do 13º salário era R$ 760,00, o prazo dessa aplicação foi de:

a) 12 meses
b) 15 meses e meio
c) 17 meses
d) 19 meses e meio
e) 22 meses

19. (Oficial de Justiça) Quanto de juro um capital de R$ 26.000,00, empregada à taxa de 7,5% ao mês durante 1 ano e 4 meses.

a) R$ 1.950,00
b) R$ 195,00
c) R$ 19.500,00
d) R$ 31.200,00
e) R$ 24.780,00

20. (FCC - Banco do Brasil - Escriturário) Uma máquina com vida útil de 3 anos é adquirida hoje (data 0) produzindo os respectivos retornos: R$ 0,00 no final do primeiro ano, R$ 51.480,00 no final do segundo ano e R$ 62.208,00 no final do terceiro ano. O correspondente valor para a taxa interna de retorno encontrado foi de 20% ao ano. Então, o preço de aquisição da máquina na data 0 é de:

a) R$ 71.250,00
b) R$ 71.500,00
c) R$ 71.750,00
d) R$ 78.950,00
e) R$ 86.100,00

21. (CEF) Um capital de R$ 15.000,00 foi aplicado a juro simples à taxa bimestral de 3%. Para que seja obtido um montante de R$ 19.050,00, o prazo dessa aplicação devera ser de:

a) 1 ano e 10 meses
b) 1 ano e 9 meses
c) 1 ano e 8 meses
d) 1 ano e 6 meses
e) 1 ano e 4 meses

22. (OFFICIUM - TJ - Auxiliar Judiciário) Um capital que, empregado a juros simples de 2% ao mês, rende R$ 300,00 em 3 meses é de:

a) R$ 3.000,00
b) R$ 5.000,00
c) R$ 8.000,00
d) R$ 10.000,00
e) R$ 12.000,00

23. (FCC - TRT - Técnico Judiciário) Romualdo recebeu R$ 15.000,00, referentes a uma indenização trabalhista. Dessa quantia, retirou 20% para o pagamento dos honorários de seu advogado e o restante aplicou em um investimento a juros simples, à taxa anual de 18,75%. Quantos meses Romualdo deverá esperar até que possa retirar R$ 15.000,00 dessa aplicação?

a) 16
b) 15
c) 14
d) 13
e) 12

24. (FCC - Agente Administrativo) O extrato de uma aplicação financeira capitalizada anualmente no sistema de juros compostos é dado na tabela a seguir.

Data	Saldo (R$)
01/01/2008	20.000,00
01/01/2009	?
01/01/2010	28.800,00

No período considerado, não houve depósitos nem retiradas. Se as taxas de juros referentes aos períodos de 01/01/2008 a 01/01/2009 e de 01/01/2009 a 01/01/2010 foram iguais, então o saldo da aplicação, em reais, em 01/01/2009 era de:

a) 25.000,00
b) 24.800,00
c) 24.400,00
d) 24.200,00
e) 24.000,00

25. (CEF - Escriturário) Um capital de R$ 2.500,00 esteve aplicado à taxa de 2%, num regime de capitalização composta. Após um período de 2 meses, os juros resultantes dessa aplicação serão:

a) R$ 98,00
b) R$ 101,00
c) R$ 110,00
d) R$ 114,00
e) R$ 121,00

26. (FCC - TRT - Analista Judiciário) Ao sacar X reais de sua conta corrente, Alaíde recebeu do caixa do Banco um total de 51 cédulas, que eram de apenas três tipos: 10, 20 e 50 reais. Considerando que as quantias correspondentes a cada tipo de cédula eram iguais, o valor de X era:

a) R$ 300,00
b) R$ 450,00
c) R$ 600,00
d) R$ 750,00
e) R$ 900,00

27. (FCC - Banco do Brasil - Escriturário) Um capital é aplicado, durante 8 meses, a uma taxa de juros simples de 15% ao ano, apresentando um montante igual a R$ 13.200,00 no final do prazo. Se este mesmo capital tivesse sido aplicado, durante 2 anos, a uma taxa de juros compostos de 15% ao ano, então o montante no final deste prazo seria igual a:

a) R$ 15.606,50
b) R$ 15.870,00
c) R$ 16.531,25
d) R$ 17.192,50
e) R$ 17.853,75

28. (CESGRANRIO - Assistente Administrativo) Uma pousada que dispõe de 60 quartos, alguns duplos (para duas pessoas) e outros, triplos (para três pessoas), pode acomodar, no máximo, 162 hóspedes. Quantos quartos duplos há nessa pousada?

a) 18
b) 22
c) 28
d) 36
e) 42

29. (TJ/SP - Escrevente Judiciário) Um terço de um número somado aos seus cinco sextos é igual a 21. Qual é este número?

a) 15
b) 16
c) 32
d) 18
e) 20

30 - (MEMORIAL SP - Assistente Administrativo) O conjunto verdade da equação dada abaixo no universo dos números racionais é: $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 2}{3} = 8$

a) $V = \left\{-\frac{47}{5}\right\}$

b) $V = \left\{\frac{48}{5}\right\}$

c) $V = \left\{\frac{47}{5}\right\}$

d) $V = \left\{-\frac{48}{5}\right\}$

e) $V = \left\{\frac{46}{5}\right\}$

31 - (Auxiliar Técnico Administrativo) Tenho R$ 230,00. Se eu der R$ 35,00 para minha irmã, ficaremos com a mesma quantia. A quantia que ela tem é:

a) R$ 140,00
b) R$ 150,00
c) R$ 160,00
d) R$ 170,00
e) R$ 180,00

32 - (IBGE - Agente de Pesquisa) A soma de três números consecutivos de sete é 84. O maior deles é múltiplo de:

a) 3
b) 5
c) 11
d) 13
e) 12

GABARITO															
1	C	5	D	9	D	13	D	17	D	21	C	25	B	29	D
2	E	6	E	10	B	14	C	18	D	22	B	26	E	30	C
3	E	7	D	11	C	15	E	19	D	23	A	27	B	31	C
4	C	8	E	12	D	16	C	20	C	24	E	28	A	32	B

10. Aplicações da Matemática Financeira

Entre as diversas aplicações da Matemática, está a de resolver problemas de ordem financeira, como calcular os valores das prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e diversas outras situações.

11. Números Proporcionais

O número 3 representa a metade de 6, o mesmo que 5 representa em relação a 10 (metade), que também é o mesmo que 8 representa em relação a 16 (metade).

Dizemos que os números 3, 5 e 8 são diretamente proporcionais a 6, 10 e 16, nessa ordem.

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{8}{16} \quad \text{ou} \quad \frac{3+5+8}{6+10+16} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Neste exemplo, $\frac{1}{2}$ é considerado o **coeficiente de proporcionalidade**.

Para ficar mais claro, explicaremos de uma forma mais prática.

$\frac{3}{6} \longrightarrow$ 3 reais divididos para 6 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

$\frac{5}{10} \longrightarrow$ 5 reais divididos para 10 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

$\frac{8}{16} \longrightarrow$ 8 reais divididos para 16 pessoas, cada uma ganhará 0,50 centavos.

Isso acontece porque 3, 5 e 8 são diretamente proporcionais a 6, 10 e 16, nessa ordem.

Diretamente Proporcional

Podemos dizer que os números reais não-nulos a, b, c, d, ..., n são diretamente proporcionais aos números a', b', c', d', ..., n', nessa ordem, se e somente se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots = \frac{n}{n'}$$

Temos que prestar atenção em duas coisas:

- a fração irredutível equivalente a $\frac{a}{a'}$ é chamada de coeficiente de porporcionalidade (K);
- a fração $\dfrac{a + b + c + d + \ldots + n}{a' + b' + c' + d' + \ldots + n'} = K$

Inversamente Proporcional

Os números reais não-nulos a, b, c, d, ..., n são inversamente proporcionais aos números reais a', b', c', d', ..., n', nessa ordem, da seguinte forma:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{n}{\frac{1}{n'}} \quad \text{ou} \quad a \,.\, a' = b \,.\, b' = c \,.\, c' = n \,.\, n'$$

Exemplo 1

Verifique se os números 5, 10 e 15 são diretamente proporcionais a 30, 60 e 75, nessa ordem.

Solução

A ordem sugerida foi $\frac{5}{30}$, $\frac{10}{60}$, $\frac{15}{75}$.

Vamos simplificar cada fração. Se suas frações irredutíveis forem iguais, então serão diretamente proporcionais.

$\frac{5}{30} : 5 = \frac{1}{6}$ ← fração irredutível

$\frac{10}{60} : 10 = \frac{1}{6}$ ← fração irredutível

$\frac{15}{75} : 5 = \frac{3}{15} : 3 = \frac{1}{5}$ ← fração irredutível

Como: $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{5}$ (não são diretamente proporcionais)

Exemplo 2

Os números 27, 12 e x são proporcionais aos números y, 36 e 15, nessa ordem. Encontre x e y.

Solução

$$\frac{27}{y} = \frac{12}{36} = \frac{x}{15} \rightarrow \frac{12}{36} : 2 = \frac{6}{18} : 2 = \frac{3}{9} : 3 = \frac{1}{3}$$

Então podemos fazer:

$$\frac{27}{y} = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{27 \,.\, 3}{1} = \frac{81}{1} = 81 \qquad y = 81$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{1 \;.\; 15}{3} = \frac{15}{3} = 5 \qquad x = 5$$

Portanto, $x = 5$ e $y = 81$

EXEMPLO 3

Encontre o valor de x e y, sabendo que os números 9, x e 2 são inversamente proporcionais aos números 4, 6 e y, nessa ordem.

Solução

$$\frac{9}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{\frac{1}{y}} \rightarrow \frac{36}{1} = \frac{6x}{1} = \frac{2y}{1} \rightarrow 36 = 6x = 2y$$

Então:

$$36 = 6x \rightarrow x = \frac{36}{6} = 6 \qquad x = 6$$

$$36 = 2y \rightarrow y = \frac{36}{2} = 18 \qquad y = 18$$

Portanto, $x = 6$ e $y = 18$

DIVISÃO DE UMA QUANTIA EM PARTES PROPORCIONAIS

Preste atenção no seguinte problema:

EXEMPLO 1

Três sócios tiveram a seguinte participação em um negócio: o primeiro investiu R$ 5.000,00, o segundo R$ 4.000,00 e o terceiro R$ 2.000,00. Ao final de dois meses obtiveram um lucro de R$ 3.300,00. Quanto lucrou cada sócio?

Solução

Problema deste tipo, o lucro deve ser repartido de forma diretamente proporcional à quantia que cada um investiu.

Vamos chamar o primeiro, segundo e terceiro sócios de A, B e C respectivamente.

$$\frac{A}{5000} = \frac{B}{4000} = \frac{C}{2000}$$

$$\rightarrow \frac{A + B + C}{5000 + 4000 + 2000} = \frac{3300}{11000} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{A}{5000} = \frac{3}{10} \rightarrow A = \frac{5000 \,.\, 3}{10} = 500 \,.\, 3 = 1500$$

$$\frac{B}{4000} = \frac{3}{10} \rightarrow B = \frac{4000 \,.\, 3}{10} = 400 \,.\, 3 = 1200$$

$$\frac{C}{2000} = \frac{3}{10} \rightarrow B = \frac{2000 \,.\, 3}{10} = 200 \,.\, 3 = 600$$

O primeiro sócio receberá R$ 1.500,00, o segundo R$ 1.200,00 e o terceiro R$ 600,00.

EXEMPLO 2

Reparta o número 364 em parcelas proporcionais aos números 16, 40, 32 e 24.

Solução

$$\frac{a}{16} = \frac{b}{40} = \frac{c}{32} = \frac{d}{24} \rightarrow \frac{364}{16 + 40 + 32 + 24} \rightarrow \frac{364}{112}$$

$$\frac{364}{112} : 2 = \frac{182}{56} : 2 = \frac{91}{28} : 7 = \frac{13}{4}$$

Então:

$$\frac{a}{16} = \frac{b}{40} = \frac{c}{32} = \frac{d}{24} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{a}{16} = \frac{13}{4} \rightarrow a = \frac{16 \,.\, 13}{4} = 4 \,.\, 13 = 52$$

$$\frac{b}{40} = \frac{13}{4} \rightarrow b = \frac{40 \,.\, 13}{4} = 10 \,.\, 13 = 130$$

$$\frac{c}{32} = \frac{13}{4} \rightarrow c = \frac{32 \,.\, 13}{4} = 8 \,.\, 13 = 104$$

$$\frac{d}{24} = \frac{13}{4} \rightarrow d = \frac{24 \,.\, 13}{4} = 6 \,.\, 13 = 78$$

Logo: $\frac{52}{16} = \frac{130}{40} = \frac{104}{32} = \frac{78}{24}$

EXEMPLO 3

Reparta a quantia de R$ 945,00 em partes inversamente proporcionais aos números 6 e 8.

Solução

$$\frac{A}{\frac{1}{6}} = \frac{B}{\frac{1}{8}} = \frac{945}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} \rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4+3}{1} = \frac{7}{24}$$

$$\rightarrow \frac{6A}{1} = \frac{8B}{1} = \frac{945 \,.\, 24}{7}$$

$$\rightarrow 6A = 8B = 135 \,.\, 24$$

$$\rightarrow 6A = 8B = 3240$$

$$\rightarrow 6A = 3240$$

$$A = \frac{3240}{6} = 540$$

$$\rightarrow 8B = 3240$$

$$B = \frac{3240}{8} = 405$$

Logo, A = R$ 540,00 e B = R$ 405,00.

Exemplo 4

Alberto e Bruno são sócios. Ao final de um investimento lucraram R$ 4.900,00 e cada um receberá proporcionalmente ao que investiram. Sabemos que Bruno investiu R$ 2.000,00 a mais que Alberto e seu lucro foi de R$ 700,00 a mais que o de Alberto. Quanto cada um investiu nesse negócio?

Solução

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

$$\frac{A}{x} = \frac{A + 700}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

Como Bruno lucrou 700 a mais que Alberto podemos escrever: B = A + 700

Sabemos que: $A + A + 700 = 4900$

$\Rightarrow 2A = 4900 - 700$

$\Rightarrow A = \dfrac{4200}{2}$

$\Rightarrow A = 2100$

Como: $B = A + 700$

$\Rightarrow B = 2100 + 700$

$\Rightarrow B = 2800$

Agora podemos escrever:

$$\frac{2100}{x} = \frac{2800}{x + 2000} = \frac{4900}{2x + 2000}$$

$$\frac{2100}{x} = \frac{2800}{x + 2000} \Rightarrow 2800x = 2100x + 4200000$$

$\Rightarrow 2800x - 2100x = 4200000$

$\Rightarrow 700x = 4200000$

$\Rightarrow x = \dfrac{42000\cancel{0}\cancel{0}}{7\cancel{0}\cancel{0}}$

$\Rightarrow x = 6000$

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{x + 2000} \Rightarrow \frac{A}{6000} = \frac{B}{6000 + 2000}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{6000} = \frac{B}{8000}$$

Alberto investiu R$ 6.000,00 e Bruno R$ 8.000,00.

12. Porcentagem

A porcentagem é uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou outra representação equivalente. Veja os seguintes exemplos:

a) $50\% = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2} = 0{,}50 = 0{,}5$ (metade)

b) $100\% = \dfrac{100}{100} = \dfrac{1}{1} = 1$ (tudo)

c) $9\% = \dfrac{9}{100} = 0{,}09$

d) $120\% = \dfrac{120}{100} = \dfrac{6}{5} = 1{,}20$ ou $1{,}2$

e) $1\% = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

f) $200\% = \dfrac{200}{100} = \dfrac{2}{1} = 2$ (dobro)

g) $10\% = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

h) $25\% = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

i) $75\% = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

PORCENTAGEM DE UMA QUANTIA

Uma TV 42” está com o preço de R$ 3.200,00 que pode ser parcelado em até 10x. À vista o cliente recebe um desconto de 15%. Quanto é o valor do desconto e quanto é o valor da TV à vista?

Solução

Para calcularmos a porcentagem de uma quantia, existem várias formas. → $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

Precisamos calcularmos 15% de um certo valor, então multiplicamos $\frac{15}{100}$ ou 0,15 por este valor.

$$\frac{15}{1\cancel{00}} \cdot 32\cancel{00} = 15.32 = 480$$

Com R$ 480,00 de desconto, à vista a TV fica por:

$$3200 - 480 = 2720$$

Concluimos que 15% de R$ 3.200 é R$ 480,00 então a TV custa R$ 2.720,00 à vista.

EXEMPLO 1

Vamos calcular 45% de R$ 80,00 das maneiras mais práticas.

Podemos fazer:

$$\frac{45}{10\cancel{0}} \cdot 8\cancel{0} = \frac{36\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 36$$

Ou fazemos:

$$45\% = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

$$0{,}45 \cdot 80 = 36$$

Veremos agora, de maneira bem prática, como encontrar o valor procurado depois de um desconto ou um acréscimo, que é dado em geral por causa dos juros.

a) Calcule o valor de um celular que custa R$ 360,00 após um desconto de 10%.

Solução

Tudo, significa que é 100%, então: R$ 360,00 = 100%

Após 10% de desconto o valor do celular será 90% (100% - 10%). Então podemos escrever direto:

$\frac{9\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 36\cancel{0} = 324$ ou podemos fazer também $0{,}90 \cdot 360 = 324$

O celular custará R$ 324,00.

b) Um cliente foi pagar uma parcela atrasada no valor de R$ 550,00 mais uma multa de 3%. Quanto o cliente pagou?

Solução

Para economizar cálculos e tempo, o que é muito importante em Concursos e Vestibulares, podemos fazer logo:

$1{,}0\cancel{3} \cdot 550 = 566{,}5$ ou $\frac{103}{10\cancel{0}} \cdot 55\cancel{0} = 566{,}5$

O cliente pagará R$ 566,50.

Lembre-se: Desconto = Subtração do valor real
Multa = Acréscimo = Adição no valor real

Exemplo 2

Uma geladeira, cujo preço à vista é R$ 680,00, tem um acréscimo de 5% no seu preço se for paga em 3 prestações iguais. Qual é o preço de cada prestação?

Solução

$$5\% \text{ de } 680 = \frac{5}{10\cancel{0}} \cdot 68\cancel{0} = \frac{340}{10} = 34 \text{ (valor do acréscimo)}$$

680 + 34 = 714 (preço total após o acréscimo)

714:3 = 238 (valor de cada prestação)

O valor de cada prestação é de R$ 238,00.

Exemplo 3

O salário de um trabalhador era de R$ 840,00 e passou a ser de R$ 966,00. Qual doi a porcentagem de aumento?

Solução

? % de 840 = 966

$$x \cdot 840 = 966$$

$$x = \frac{966}{840}$$

$$x = 1{,}15 \text{ ou } \frac{115}{100}$$

Lembrando que $x = \underbrace{1}_{\text{valor do salário}} + \underbrace{0{,}15}_{\text{valor do aumento}}$

Logo, o aumento foi de 15%.

Exemplo 4

André gastou 40% do que tinha e ainda sobrou R\$ 87,00. Quanto ele tinha e qual foi o valor que gastou?

Solução

Vamos considerar que ele tinha "x". Então:

$$x - \frac{40}{100} \cdot x = 87$$

$$x - \frac{4\cancel{0}x}{10\cancel{0}} \cdot x = 87$$

$$x - \frac{4x}{10} \cdot x = 87$$

$$\frac{10x - 4x}{10} = 87$$

$$6x = 87 \cdot 10$$

$$6x = 870$$

$$x = \frac{870}{6}$$

$$x = 145$$

Ou então podemos fazer:

Se ele gastou 40%, ainda tem 60%

$$\frac{60}{100} \text{ de } x = 87$$

$$\frac{60}{100} \cdot x = 87$$

$$x = \frac{87 \cdot 10\cancel{0}}{6\cancel{0}}$$

$$x = 145$$

Ele gastou $145 - x = 87$

$\rightarrow$ $x = 145 - 87$

$\rightarrow$ $x = 58$

Logo, ele tinha R\$ 145,00 e gastou R\$ 58,00.

Exemplo 5

Laura gastou R\$ 900,00 na compra de uma bicicleta, de um aparelho de som e de uma estante. A bicicleta custou R\$ 60,00 a menos que a estante e o preço do aparelho de som corresponde a 80% do preço da bicicleta. Quanto custou cada um?

Solução

b ← bicicleta
e ← estante
s ← aparelho de som

$$\begin{cases} b + e + s = 900 \\ b + 60 = e \quad \text{(R\$ 60,00 a menos que a estante)} \\ s = \dfrac{80b}{100} \quad \text{(80\% da bicicleta)} \end{cases}$$

Vamos inserir as duas últimas equações na primeira. Como temos "b" nas duas últimas, isolaremos a outra variável.

$$b + 60 = e \quad \rightarrow \quad e = b + 60$$

$$s = \frac{8\cancel{0}b}{10\cancel{0}} \quad \rightarrow \quad s = \frac{4b}{5}$$

Podemos escrever:

$$b + e + s = 900$$

$$b + b + \frac{4b}{5} = 900 - 60$$

$$2b + \frac{4b}{5} = 840$$

$$\frac{10b + 4b}{5} = 840$$

$$\frac{14b}{5} = 840$$

$$b = \frac{840 \,.\, 5}{14}$$

$$b = 300$$

Então:

$$e = b + 60$$

$$e = 300 + 60$$

$$e = 360$$

$$s = \frac{4b}{5}$$

$$s = \frac{4 \,.\, 300}{5}$$

$$s = 240$$

O valor da bicicleta é R$ 300,00, da estante R$ 360,00 e do aparelho de som R$ 240,00.

13. Termos da Matemática Financeira

A quantia (capital) que uma pessoa aplica na caderneta de poupança por um determinado período (tempo), lhe renderá um certo valor (juros) que, somado com o capital aplicado, dá um total (montante). O valor a ser ganho depende da porcentagem (taxa de juros).

Ao final do período, a pessoa terá um montante:

$$\boxed{\text{Montante} = \text{Capital} + \text{Juros}}$$

De forma prática, vamos ver o exemplo à seguir:

<u>EXEMPLO 1</u>

O banco ABC oferece rendimento de 1,2% ao mês. Aplicando-se R$ 600,00 neste banco, depois de um mês, que quantia o cliente terá em sua conta?

Solução

$$1{,}2\% \text{ de } 600 = \frac{1{,}2}{1\cancel{00}} \cdot 6\cancel{00} = 7{,}2 \text{ (juros)}$$

600 (capital) + 7,2 (juros) = 607,2 (montante)

No fim de um mês de aplicação, a quantia total na conta do cliente será de R$ 607,20.

Neste exemplo temos:
c = Capital = R$ 600,00
t = Tempo = 1 mês
i = Taxa de juros = 1,2% ao mês
j = Juros = R$ 7,20
m = Montante = R$ 607,20

14. Juros simples

Um determinado capital aplicado à taxa de 2% de juros simples ao mês, durante 5 meses, rende 10% do capital no final desses 5 meses, ou seja, 5 vezes 2%.

Temos que levar em consideração que a taxa e o tempo devem se referir à mesma unidade de tempo (% ao mês e meses ou % ao dia e dias, % ao ano e anos e assim por diante).

No cálculo do juros simples, duas fórmulas são importantes para simplificar os cálculos:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot t} \qquad \boxed{M = C\,(1 + i \cdot t)}$$

Onde: J = Juros
C = Capital
i = Taxa de juros
t = Tempo
M = Montante

> **Observação:** quando realizarmos os cálculos, as unidades de tempo e taxa devem estar nas mesmas unidades.

Exemplo 1

O capital de R$ 530,00 foi aplicado à taxa de juros simples de 3% ao mês. Qual o valor do montante após 5 meses?

Solução

$$3\% = \frac{3}{100} = 0{,}03$$

$M = C\,(1 + i \cdot t)$
$M = 530\,(1 + 0{,}03 \cdot 5)$
$M = 530\,(1 + 0{,}15)$
$M = 609{,}5$ Após 5 meses o montante será de R$ 609,50

EXEMPLO 2

Foi tomado um empréstimo de R$ 1000,00. Ao final de 2 meses foi pago um total de R$ 1200,00 pelo empréstimo. Quais foram os juros pagos e a taxa de juros simples?

Solução

$\boxed{J = C \cdot i \cdot t}$ $\boxed{J = M - C}$

Calculemos primeiro o Juros: $J = M - C$

$\Rightarrow J = 1200 - 1000$

$\Rightarrow J = 200$

Como: $J = C \cdot i \cdot t$

$\Rightarrow 200 = 1000 \cdot i \cdot 2$

$\Rightarrow 200 = 2000 \cdot i$

$\Rightarrow i = \dfrac{2\cancel{0}\cancel{0}}{20\cancel{0}\cancel{0}}$

$\Rightarrow i = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ ou 10%

Os juros foram de R$ 200,00 e a taxa foi de 10% ao mês.

EXEMPLO 3

Um capital de R$ 600,00 aplicado à taxa de juros simples de 20% ao ano, gerou um montante de R$ 1080,00 depois de certo tempo. Qual foi esse tempo?

Solução

Aplicaremos $\boxed{M = C\,(1 + i \cdot t)}$

$M = C\ (1 + i\ .\ t)$

$\rightarrow$ $1080 = 600\ (1 + 0{,}2\ .\ t)$

$20\% = \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 0{,}2$

$\rightarrow$ $1080 = 600 + 120t$

$\rightarrow$ $1080 - 600 = 120t$

$\rightarrow$ $480 = 120t$

$\rightarrow$ $\frac{480}{120} = t$

$\rightarrow$ $t = 4$ anos

Como a taxa é 20% ao ano, então o tempo também será ano.

A tempo foi 4 anos.

EXEMPLO 4

Qual foi o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 1,5% ao mês, rendeu R$ 90,00 em um trimestre?

Solução

Temos que entender o seguinte: rendeu = juros
um trimestre = 3 meses

$J = C\ .\ i\ .\ t$

$\rightarrow$ $90 = C\ .\ 0{,}015\ .\ 3$

$1{,}5\% = \frac{1{,}5}{100} = 0{,}015$

$\rightarrow$ $90 = C\ .\ 0{,}045$

$\rightarrow$ $\frac{90}{0{,}045} = C$

$\rightarrow$ $C = 2000$

O capital foi de R$ 2000,00.

Exemplo 5

A que taxa devemos aplicar o capital de R$ 4500,00 no sistema de juros simples, para que, depois de 4 meses o montante seja de R$ 5040,00?

Solução

$$\boxed{M = C\,(1 + i\,.\,t)}$$

$5040 = 4500\,(1 + i\,.\,4)$

➡ $\dfrac{5040}{4500} = 1 + 4i$

➡ $1{,}12 = 1 + 4i$

➡ $1{,}12 - 1 = 4i$

➡ $0{,}12 = 4i$

➡ $\dfrac{0{,}12}{4} = i$

➡ $i = 0{,}03$ ou 3%

Devemos aplicar a taxa de 3% ao mês.

15. Juros compostos

Um determinado capital de R$ 40.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses. Qual foi o montante no final dos 3 meses?

Solução

Como estamos tratando de juros sobre juros (juros compostos), devemos aplicar a taxa sobre o montente no início de cada mês.

Mês	M = C (1 + i . t)
1º	M = 40.000 (1 + 0,02 . 1) = 40.800
2º	M = 40.800 (1 + 0,02 . 1) = 41.616
3º	M = 41.616 (1 + 0,02 . 1) = 42.448,32

Ao final do 3º mês temos um montante de R$ 42.448,32.

Este método não é viável para períodos longos. Ao invés disso, podemos usar uma fórmula para deduzir o montante acumulado sobre uma taxa de juros compostos.

Fórmula do Juros Compostos

Podemos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante(M), produzido por um capital(C), aplicado à taxa(i), durante um determinado tempo(t).

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

O problema anterior poderia ser resolvido da seguinte forma:

$M = C\,(1 + i)^t$

→ $M = 40.000\,(1 + 0{,}02)^3$

→ $M = 40.000\,(1{,}02)^3$

→ $M = 40.000 \,.\, 1{,}061208$

→ $M = 42.448{,}32$

Exemplo 1

Quanto receberá de juros, no fim de um semestre, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R$ 6000,00 à taxa de 1% ao mês?

Solução

$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$

$1\% = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$

1 semestre = 6 meses

→ $M = 6000\,(1 + 0{,}01)^6$

→ $M = 6000\,(1{,}01)^6$

→ $M = 6000 \,.\, 1{,}0615201506$

→ $M = 6369{,}12$

Como trabalhamos com dinheiro, arredondamos para duas casas decimais.

Como: Juros = Montante - Capital → $J = M - C$

→ $J = 6369{,}12 - 6000$

→ $J = 369{,}12$

Receberá de juros R$ 369,12.

Exemplo 2

Qual deve ser o capital que no sistema de juros compostos, a taxa de 20% ao ano gera um montante de R$ 14400,00 no fim de 2 anos?

Solução

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

$$20\% = \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 0{,}2$$

→ $14400 = C\,(1 + 0{,}2)^2$

→ $14400 = C\,(1{,}2)^2$

→ $14400 = C \,.\, 1{,}44$

→ $\dfrac{14400}{1{,}44} = C$

→ $C = 10.000$

O capital será de R$ 10.000,00.

Exemplo 3

O capital de R$ 2000,00, aplicado a juros compostos, rendeu, após 4 meses, juros de R$ 165,00. Qual foi a taxa de juros?

Solução

$$\boxed{M = C + J}$$

→ $M = 2000 + 165$

→ $M = 2165$

Então:

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

→ $2165 = 2000\,(1 + i)^4$

→ $\dfrac{2165}{2000} = (1 + i)^4$

→ $\dfrac{433}{400} = (1 + i)^4$

→ $1{,}0825 = (1 + i)^4$

→ $\sqrt[4]{1{,}0825} = 1 + i$

→ $1{,}020015981 = 1 + i$

→ $1{,}020015981 - 1 = i$

→ $i = 0{,}020015981$ ou $2{,}0015981\%$ ao mês

A taxa foi de 2,0015981% ao mês.

Exemplo 4

Uma pessoa vai fazer uma compra no valor de R$ 4000,00, usando o que tem depositado na caderneta de poupança, que está rendendo 1% ao mês. Ela quer saber, do ponto de vista financeiro, qual plano de pagamento é mais vantajoso:

- Pagar à vista;
- Pagar em duas prestações iguais de R$ 2005,00 cada, a segunda parcela será paga com 30 dias.

Solução

Se ela pagar à vista sobrará zero.

Pagando em 2 x de R$ 2005,00, após o pagamento da primeira sobra 4000 - 2005 = 1995.

Ficando R$ 1995,00 na caderneta com juros de 1% teremos em 1 mês:

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

➜ $M = 1995\,(1 + 0{,}01)^1$

➜ $M = 1995\,(1{,}01)^1$

➜ $M = 1995 \,.\, 1{,}01$

➜ $M = 2014{,}95$

Dessa forma é mais vantajoso pagar em 2 vezes.

<u>Exemplo 5</u>

Maria tomou um empréstimo de R$ 150.000,00 a juros de 12% ao ano. Qual será a dívida de Maria após 3 anos?

Solução

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

➜ $M = 150000\,(1 + 0{,}12)^3$

➜ $M = 150000\,(1{,}12)^3$

➜ $M = 150000 \,.\, 1{,}404928$

➜ $M = 210739{,}2$ A dívida será de R$ 210.739,20.

16. Questões Resolvidas

1. (VUNESP) Se a taxa de inflação de janeiro é de 6% e a de fevereiro é de 5%, então a taxa de inflação no bimestre janeiro/fevereiro é de:

a) 11%   b) 11,1%   c) 11,2%   d) 11,3%   e) 11,4%

Solução

Esse tipo de problema pode ser resolvido de foma bem prática se tomarmos como base o número 100.

Aplicando 6% em cima de 100 temos:

$$100 \,.\, 1{,}06 = 106$$

6 é **6% de 100**

Agora, 5% em cima de 106:

$$106 \,.\, 1{,}05 = 111{,}3$$

Em relação a 100, o número 111,3 possui 11,3% a mais.

Resposta: d

2. (UNICAMP-SP) Uma pessoa investiu R$ 3000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido. Com quantos reais ela ficou após os dois meses?

a) R$ 2000,00
b) R$ 2060,00
c) R$ 2160,00
d) R$ 2220,00
e) R$ 2310,00

Solução

Se ela perdeu 40%, então:

40% de $3000 = \dfrac{40}{1\cancel{00}} \cdot 30\cancel{00} = 1200$ $\leftarrow$ **Perdeu R\$ 1200,00**

Se ela recuperou 30% do que havia perdido, então:

30% de $1200 = \dfrac{30}{1\cancel{00}} \cdot 12\cancel{00} = 360$ $\leftarrow$ **Recuperou R\$ 360,00**

Portanto, ela ficou com:

$$3000 - 1200 + 360 = \mathbf{2160}$$

Resposta: c

3. (UEL-PR) Em uma liquidação, os preços dos artigos de uma loja são reduzidos em 20% de seu valor. Terminada a liquidação e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

a) 27,5% b) 25% c) 22,5% d) 21% e) 20%

Solução

A exemplo da questão 1, tomaremos o número 100 como base:

Se a mercadoria custa R$ 100,00 e diminui 20% de 100, ficaremos com R$ 80,00.

Agora iremos procurar a porcentagem para que, dado um aumento em cima de R$ 80,00, chegue a R$ 100,00.

Sabemos que devemos aumentar R$ 20,00, mas quantos porcento 20 é de 80?

Uma regra de três simples resolve o caso:

$$\begin{array}{ccc} 80 & \text{——} & 100\% \\ 20 & \text{——} & x\% \end{array}$$

$$x = \frac{2\cancel{0} \cdot 100}{8\cancel{0}}$$

$$x = 25\%$$

Resposta: b

4. (UFRJ) Um lojista oferece 5% de desconto ao cliente que pagar suas compras à vista. Para calcular o valor do desconto, o vendedor usa sua máquina calculadora do seguinte modo:

$\boxed{\text{Preço total}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\%}$ $\boxed{-}$

Um outro modo de calcular o valor com desconto seria multiplicar o preço total das mercadorias por:

a) 0,05 b) 0,5 c) 0,95 d) 1,05 e) 1,5

Solução

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Se um produto sofre um desconto de 5%, seu valor ficará sendo 95%. Como queremos saber o valor do produto com o desconto, devemos multiplicar por 95% ou $\frac{95}{100}$.

$$95\% = \frac{95}{100} = 0{,}95$$

Resposta: c

5. (UNIFOR-CE) Em certa loja, cada produto vendido tem um acréscimo de 60% sobre o preço de custo. No entanto, como a loja deve recolher impostos correspondentes a 25% do preço de venda, seu percentual de lucro sobre o preço de custo é muito inferior a 60%. Esse percentual é de:

a) 35% b) 30% c) 25% d) 20% e) 15%

Solução

Algebricamente, o produto vale "x":

$$x + \frac{60x}{100} = \leftarrow \text{(produto mais 60\% do seu valor)}$$

$$= \frac{160x}{10\cancel{0}} = \frac{16x}{10} = \frac{8x}{5}$$

$$\frac{8x}{5} - \frac{\cancel{25}^{\,5}}{100} \cdot \frac{8x}{5} \leftarrow \text{(tirando 25\% do valor de venda)}$$

$$\frac{8x}{5} - \frac{4\cancel{0}x}{10\cancel{0}} \rightarrow \frac{8x}{5} - \frac{2x}{5} = \frac{6x}{5}$$

$$\frac{6x}{5} = \frac{5x}{5} + \frac{x}{5} \rightarrow x + \frac{x}{5}\,\begin{matrix}\times 20\\ \times 20\end{matrix} \rightarrow x + \frac{20x}{100}$$

Valor do produto | Percentual em cima do produto

$$\frac{20}{100} = 20\%$$

Uma outra forma de fazer:

$$x \,.\, 1{,}60 = 1{,}6x \leftarrow \text{(valor final de venda)}$$

Vamos tirar 25% do valor de venda e ver quanto fica, se tiramos 25%, sobra 75%.

$$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

$$1{,}6x \cdot 0{,}75 = \underbrace{x}_{\text{Valor do produto}} \cdot \underbrace{1{,}2}_{\text{0,2 valor da porcentagem do lucro}} \leftarrow \text{(valor final de venda)}$$

$$0{,}2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

Uma terceira forma de fazer:

Vamos supor que o produto vale R$ 100,00.

100 + 60% de aumento = 160 ← (**60% de 100 é 60**)

Vamos tirar 25% de 160, vai sobrar 75%.

$$160 \cdot 0{,}75 = 1\underline{20}$$

R$ 20,00 de lucro, o que é 20% de 100%.

Resposta: d

6. (VUNESP) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por "x" reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoção, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda desse produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoção, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%
b) prejuízo de 5%
c) lucro de 20%
d) lucro de 25%
e) lucro de 30%

Solução

O valor do produto é "x".

$$x \,.\, 1{,}50 = 1{,}5x \leftarrow (\textbf{valor do produto + 50\%})$$

Se tiramos 20% sobra 80%.

$$1{,}5x \,.\, 0{,}80 = x \,.\, 1{,}20$$

Valor do produto | 0,20 valor da porcentagem do lucro

$$\text{Lucrou } 20\% \rightarrow 0{,}2 = \frac{20}{100} = 20\%$$

De forma mais clara, poderíamos resolver da seguinte maneira:

Vamos supor que o produto vale R$ 100,00.

$$100 + 50\% = 150 \leftarrow (\textbf{50\% de 100 é 50})$$

Agora tiramos 20% de 150. Se tiramos 20%, sobra 80%.

$$15\cancel{0} \,.\, \frac{8\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} = 120$$

O dono do supermercado ainda lucra R$ 20,00 o que é 20% de 100.

Resposta: c

7. (ENEM) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos mêses.
Ele tem R$ 20000,00 que podem ser aplicados a uma taxa de jurso compostos de 2% ao mês e escolhe deixar todo o ser dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.
Para ter o carro João deverá esperar:

a) dois meses e terá a quantia exata
b) três meses e terá a quantia exata
c) três meses e ainda sobrarão aproximadamente R$ 225,00
d) quatro meses e terá a quantia exata
e) quatro meses e ainda sobrarão aproximadamente R$ 225,00

Solução

$$\boxed{M = C\,(1 + i)^t}$$

→ $M = 200000\,(1 + 0{,}02)^t$ $2\% = \dfrac{2}{100} = 0{,}02$

→ $M = 20000\,(1{,}02)^t$

Vamos atribuir valores a "t" e ver quantos meses será necessário para que o montante atinja R$ 21000,00.

Para t = 1 → $M = 20000\,(1{,}02)^1$

$M = 20000 \,.\, 1{,}02$

$M = 20400$ (não dá para comprar o carro)

Para t = 2 → $M = 20000\,(1{,}02)^2$

$M = 20000 \,.\, 1{,}0404$

$M = 20808{,}00$ (não dá para comprar o carro)

Para t = 3 → $M = 20000\ (1{,}02)^3$

$M = 20000\ .\ 1{,}061208$

$M = 21224{,}16$

Em 3 meses ele comprará o carro e ainda sobrará aproximadamente R$ 225,00.

Resposta: c

Sobre o Mestre

Albérico Henrique dos Santos, natural de Cortês - PE, estudou na rede pública de ensino, licenciado em Matemática pela Faculdade de Formação de Professores da Mata Sul, com experiência na rede pública de ensino. Autor do Artigo: “Matemágicos: Novos Jogos Somáticos” com conteúdo interativo disponível em www.geometricos.com.br. É também concurseiro e aprovado em 5 concursos públicos além de professor de Matemática, Física e Química.

Aplicações na HP 12C Financeira

1. Introdução

A calculadora HP 12C foi lançada em 1981 pela Hewlett-Packard como uma calculadora financeira programável.

Eficaz na execução de cálculos financeiros como juros, taxas e amortização, utiliza o método de **Notação Polonesa Inversa** (ou RPN - *Reverse Polish Notation*) que permite uma linha de raciocínio mais "direta e rápida" durante a formulação e melhor utilização da memória da calculadora.

Enquanto as calculadoras convencionais utilizam o **método algébrico convencional** em que se digita a sequência de botões "5" "+" "5" "=" , na HP 12C a mesma operação é realizada digitando-se os botões "5" "ENTER" "5" "+".

Portanto, o modo de utilização da calculadora financeira HP 12C exige uma sequência correta de passos para se chegar ao resultado esperado.

Além disso possui teclas específicas para expoente, prazo, juros, capital inicial, montante, parcela etc.

Como pode observar, a calculadora HP 12C pode resolver problemas de ordem matemática financeira, como calcular os valores das prestações, pagamento de impostos, rendimento de poupança e diversas outras situações desde que se insira corretamente os dados para efetuar os cálculos. Vamos aprender algumas operações básicas!

2. Visão geral da calculadora

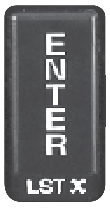
Apesar de compacta, a HP 12C pode operar até três funções:

1) Função BRANCA - escrita em cada botão. 

2) Função AMARELA - escrita <u>acima</u> dos botões. 

3) Função AZUL - escrita <u>abaixo</u> dos botões. 

Para alterar entre as funções, utiliza-se as teclas  e  em suas respectivas cores AMARELA e AZUL.

A tecla  separa a digitação entre dois números.

A tecla  serve para ligar ou desligar a HP 12C

Obs.: após aguns minutos sem uso, ela desliga automaticamente para economizar bateria, mas <u>não apaga</u> as <u>memórias</u>.

3. Início

Ligue sua HP 12C com o tecla ON .

A tecla CLX limpa o visor (memória X) e aparecerá "zero".

Obs.: como a calculadora memoriza os registradores mesmo desligada, acostume-se a pressionar as teclas f REG CLX sempre que iniciar uma nova operação. Assim limpará todos os conteúdos das memórias.

Para fazer um cálculo, entenda que precisa seguir alguns passos seguros para que dê certo, siga as instruções abaixo:

2 + 34 = ?

Básico (limpar memórias)	1º número	Registra	2º número	Operação	Resultado
f REG CLX	2	ENTER	34	+	

5 - 4 = ?

Básico (limpar memórias)	1º número	Registra	2º número	Operação	Resultado
f REG CLX	5	ENTER	4	−	1

4. Notação utilizada no Brasil

A HP 12C originalmente se encontra na notação americana, ou seja, lê um número dividindo por vírgula de três em três grupos (unidades, dezenas e centenas) a parte inteira e a parte fracionária, separada por ponto. Exemplo:

2,543,809.67

No Brasil usamos a notação europeia, ou seja, o contrário: ponto para separar a parte inteira - facilita a visualização - e vírgula para separara a parte fracionária. Exemplo:

2.543.809,67

Para alterar para notação europeia, siga os passos:

Desligue a calculadora ON .

Pressione e segure a tecla • .

Ligue a calculadora ON .

Solte a tecla • .

O número de casas decimais após a vírgula é definido rapidamente (e sem recalcular) conforme sua nececidade, veja:

Aperte f e o número de casas decimais (padrão: 2 dígitos).

Exemplo: $\sqrt{7}$ → 7 BEG g y^x $\sqrt{x}$ resulta 2,65

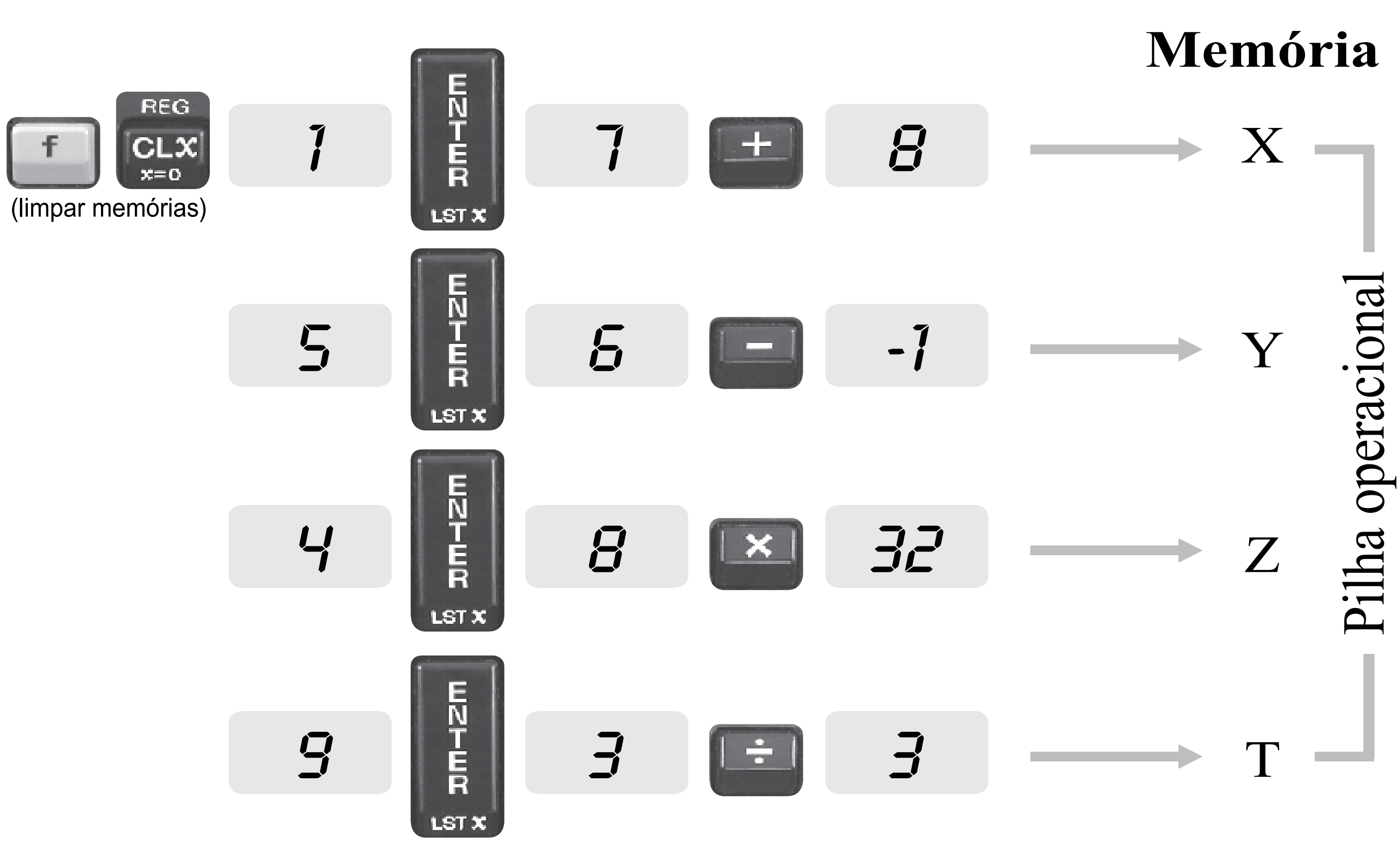
Com 4 casas decimais: f 4 D.MY resulta 2,6458

5. Memórias

Um dos grandes diferenciais da HP 12C é sua capacidade de gerenciar memórias de dados. Ela possui quatro memórias principais: X, Y, Z e T. Funcionam como uma pilha operacional da seguinte maneira:

Sequência	Memória	O que memoriza	Usadas com
	X	é o conteúdo do visor	Cálculos com dois números.
	Y	é o próximo resultado	
	Z	resultado intermediário	
	T	resultado intermediário	

Para entender, experimente fazer os cálculos simples:

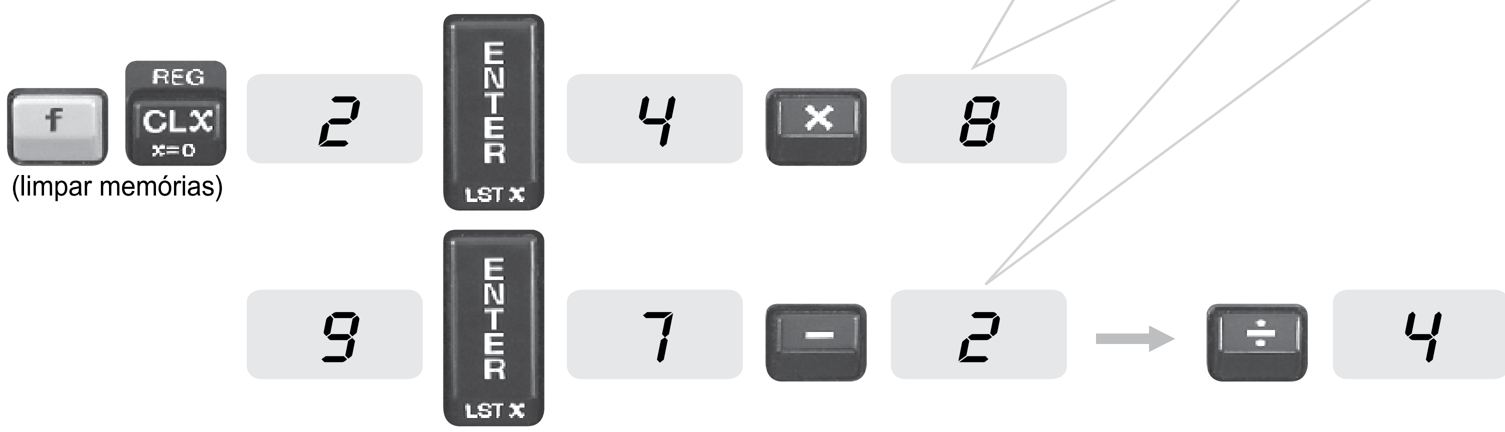


A tecla  inverte o conteúdo das memórias X e Y mantendo Z e T inalteradas.

A tecla R↓ GTO movimenta a memória para baixo, copiando na memória <u>inferior</u>. Veja como fica após os cáculos anteriores:

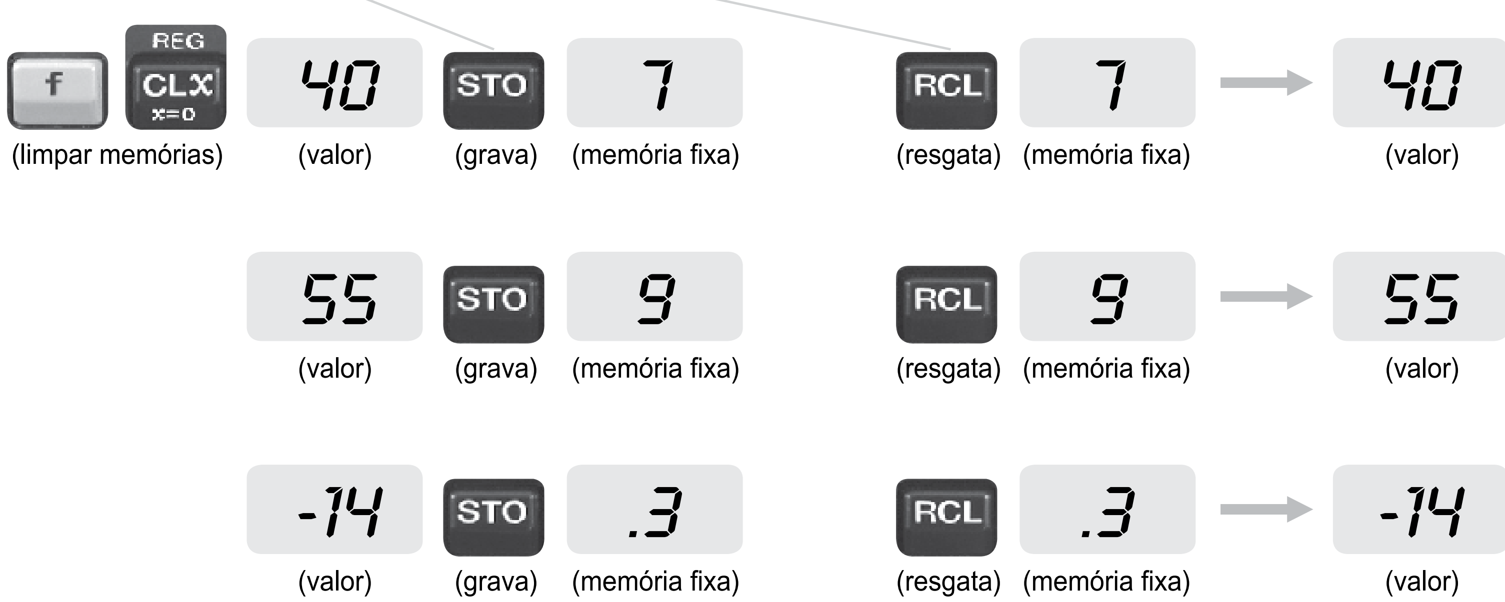
Memória		Valor	R↓ GTO Apertou	Valor	R↓ GTO Apertou	Valor	R↓ GTO Apertou	Valor	R↓ GTO Apertou	Valor
1ª	X	8		3		32		-1		8
2ª	Y	-1		8		3		32		-1
3ª	Z	32		-1		8		3		32
4ª	T	3		32		-1		8		3

Assim, entenda como inserir o cálculo (2 x 4) ÷ (9 - 7):



A tecla STO <u>guarda</u> e RCL <u>resgata</u> as 20 memórias secundárias <u>fixas</u> ou <u>estatísticas</u>. São indexadas de "$R_{0\text{ a }9}$" e de "$R_{.0\text{ a }.9}$".

Para <u>gravar</u> e <u>chamar</u> um valor da memória secundária fixa:



E como fica a memória principal durante um cálculo? Veja o exemplo abaixo e sua <u>tabela de memórias</u>: $\dfrac{(3 \times 4) + (9 - 3)}{3}$

	3	ENTER	4	×	9	ENTER	3	−	+	3	÷
X	3	3	4	12	9	9	3	6	18	3	6
Y		3	3			12	9	12		18	
Z							12				
T											

6. Limpando a memória

CLX Apaga a memória temporária X.

f SST Apaga as memórias fixas (R_1 a R_6) e as temporárias (X, Y, Z, T).

f FIN Apaga as memórias financeiras (n, i, PV, PMT e FV).

f REG Apagar <u>todas as memórias</u>: temporárias (X, Y, Z, T), fixas (R_1 a R_9 e $R_{.1}$ a $R_{.9}$), financeiras (n, i, PV, PMT e FV) e especial (LSTx).

f PREFIX Cancela as teclas f g STO RCL e R↓ Apresenta no visor os dez dígitos do número.

7. Teclas e suas siglas

Para o manuseio, facilita entender algumas siglas:

(*Change Sign*), muda o sinal positivo/negativo

(*1/x*), inverso de um número ou 1/x

(*LST X* ou *Last X*), último X memorizado

(*Registration*), muda a memória principal (ou registro)

(X⇄Y), inverte o conteúdo das memórias X e Y

(*Store*), armazena valores na memória secundária

(*Recall*), recupera valores na memória secundária

(*Enter Exponent*), introduz o expoente

(%) porcentagem de um determinado número

(%T) porcentagem de um número em relação à outro

(Δ%) variação percentual entre dois números

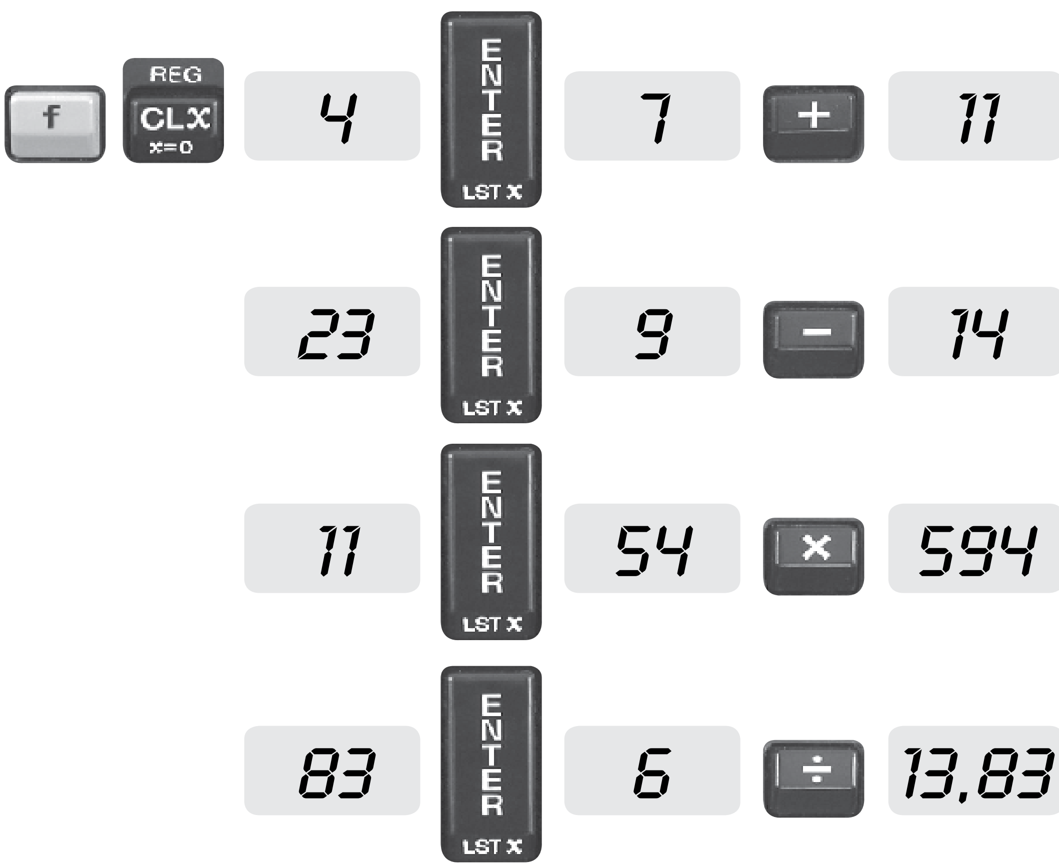
($\sqrt{x}$) raiz quadrada de um número

(∑+) Somatória

8. Como realizar operações

Calculando com a HP 12C, a correta sequência de inserção de dados é o mais importante para o bom funcionamento da equação e para fazer seu raciocínio acompanhar o procedimento do aparelho.

8.1. Adição/Subtração/Multiplicação/Divisão



4 + 7 =

23 - 9 =

11 x 54 =

83 ÷ 6 =

Sequência de algumas expressões:

$$(3 + 4) \,.\, (5 + 6) =$$

$$\frac{(27 - 14)}{(14 + 38)} =$$

27 ENTER 14 − 13 14 ENTER 38 + 52 ÷ 0,25

$$\frac{5}{3 + 16 + 21} =$$

5 ENTER 3 ENTER 16 + 19 21 + 40 ÷ 0,13

$$\left\{\frac{18}{[24 - (15 + 3)]}\right\} =$$

18 ENTER 24 ENTER 15 ENTER 3 + 18 − 6 ÷ 3

Primeiro números, depois cálculos

Observe que, após o cálculo de algumas expressões, percebe que <u>não precisa memorizar nada</u>. O método de digitação é <u>compreendido</u> pela HP 12C à medida que realiza operações que seguem as mesmas regras da matemática: primeiro devemos resolver a multiplicação e a divisão, depois a adição e subtração, respeitando parênteses, colchetes e chaves.

8.2. Porcentagem

Para calcular porcentagem de um número, o procedimento é semelhante ao anterior com a indicação de uma tecla indicativa da porcentagem. A HP 12C converte tudo sozinha, não precisa converter 12% em 0,12 como na calculadora normal.

Quanto é 12% de 500?

f | REG CLX x=0 | 500 | ENTER LST X | 12 | % INTG | 60 — 12% de 500 =

Em porcentagem seguida de porcentagem (valor líquido) o procedimento também é direto. Imagine que quer comprar algo vendido por R$ 19.000,00. O vendedor lhe dá um desconto de 7% sobre o valor da venda, mas tem impostos de 6%. Qual o valor que terá de pagar?

19.000 | ENTER LST X | 7 | % INTG | 1.330 | − | 17.670

6 | % INTG | 1060,20 | + | 18.730,20

Perceba que para calcular o valor líquido a calculadora memoriza o valor base inserido depois de calcular a porcentagem, portanto calcula como se lê: 19.000,00 - 7% + 6%

19.000	1.330	17.670	1060,20	18.730,20
valor base	desconto 7%	base-desconto	impostos 6%	valor + impostos

Para calcular qual a porcentagem um número é de um **total**, calcule o **valor total** somando valores individuais ou simplesmente insira um **total**. Digite o número cuja porcentagem deseja achar em relação ao seu **total** e aperte [%T LN].

Exemplificando sob forma de problema: no mês passado, uma empresa teve vendas de R$ 392.000,00 em São Paulo, R$ 236.000,00 no Rio de Janeiro e R$ 167.000,00 no resto do Brasil. Qual a porcentagem das vendas totais ocorreram no Rio de Janeiro?

392 [ENTER LST X] 236 [+] 628 167 [+] 795

valor SP — valor RJ — SP + RJ — valor outros — SP + RJ + outros

Total ou 100%

A HP 12C memoriza o valor total. portanto, para calcular qual a porcentagem um número é do **total**, aperte:

236 [%T LN] 29.69 % das vendas

valor RJ

[REG CLX x=0] (limpa o visor) 392 [%T LN] 49.31 % das vendas

valor SP

[REG CLX x=0] (limpa o visor) 167 [%T LN] 21.01 % das vendas

valor outros

795

Total ou 100%

SP + RJ + outros

Para calcular a diferença percentual entre dois números usamos a tecla Δ% FRAC. Por exemplo, podemos calcular a diferença percentual entre custo de atacado e custo de varejo. Se o número base for o custo de atacado, a difereça percentual é a remarcação; se o número base for o custo de varejo, a diferença percentual é a margem de lucro.

Exemplificando sob forma de problema: na feira, o preço da batata subiu de R$ 1,90 para R$ 3,90. Qual foi a variação percentual do preça da batata?

Digite o valor mais antigo (número base) primeiro:

1,90	ENTER LST x	3,90	Δ% FRAC	105,26 % de aumento
valor base		2º valor		diferença percentual entre dois números

No atacado, um porta-retratos custa R$ 15,00, no varejo R$ 19,00. Qual a porcentagem a loja usa para remarcar seus produtos e qual a margem de lucro?

15	ENTER LST x	19	Δ% FRAC	26,67 %
atacado		2º valor		porcentagem de lucro sobre o preço de custo

19	ENTER LST x	15	Δ% FRAC	-21,05 %
varejo		2º valor		porcentagem de lucro sobre o preço de venda

8.3. Potenciação

Para calcular potência na HP 12C, digite a base e, em seguida o expoente pressionando a tecla y^x.

Para calcular:

$2^3 = ?$

2	ENTER	3	y^x	8
base		expoente		potência

$25^{\frac{30}{360}} = ?$

25	ENTER	30	ENTER	360	÷	0,08	y^x	1,31
base		expoente numerador		expoente denominador		expoente		potência

$8^{-2} = ?$

8	ENTER	2	CHS	-2	y^x	0,02
base		expoente		expoente negativo		potência

Exercite as operações resolvendo $\{(1 + 0{,}638)^{\frac{48}{360}} - 1\} \,.\, 100 =$

f	CLX	1	ENTER	0,638	+	1,64
48	ENTER	360	÷	0,13	y^x	1,07
1	−	0,07	100	×	6,80	

8.4. Radiciação

Para calcular a raiz quadrada na HP 12C, digite o valor e, em seguida as teclas [g] [y^x / $\sqrt{x}$].

$\sqrt{25}$ → 25 [g] [y^x / $\sqrt{x}$] 5

Observação: a HP 12C só calcula a raiz quadrada diretamente. Para calcular outras raízes (cúbica etc) usamos o artifício da potenciação (processo inverso da radiciação). Exemplo:

$\sqrt[4]{81}$ → 81 [ENTER / LST x] 4 [1/x / e^x] 0,25 [y^x / $\sqrt{x}$] 3

8.5. Logaritmo

Para calcular logaritmo na HP 12C, digite o valor e, em seguida as teclas [g] [SL / %T / LN].

Logaritmo natural: 5 [ENTER / LST x] [g] [SL / %T / LN] 1,61

Logaritmo decimal: 8 [ENTER / LST x] 10 [g] [SL / %T / LN] [÷] 3,47
(observação: artifício)

Antiogaritmo natural: 1,61 [ENTER / LST x] [g] [1/x / e^x] 5

Antiogaritmo decimal: 2,66 [ENTER / LST x] 10 [x≷y / x≶y] [y^x / $\sqrt{x}$] 457,09
(observação: artifício)

9. Matemática financeira

O principal motivo da HP 12C existir é a matemática financeira. Possui teclas específicas, que usam a mesma conotação das fórmulas financeiras, que memorizam e facilitam os cálculos.

A chamada **memória financeira** é armazenada nas cinco primeiras teclas da primeira linha da calculadora, que armazena e exibe valores financeiros. Usam a simbologia:

[n 12×]	n	(*number*) prazo
[i 12÷]	i	(*interest*) taxa de juros
[PV CFo]	PV	(*present value*) ou capital inicial
[PMT CFj]	PMT	(*payment*) valor das prestações ou pagamentos
[FV Nj]	j	(*future value*) Valor futuro ou valor do juro

Para **armazenar** valores nas memórias financeiras:

Digite o valor 3 e uma das teclas da tabela acima [n 12×]

Para **exibir** os valores das memórias financeiras:

Aperte a tecla [RCL] e uma das teclas da tabela acima [i 12÷]

Para **limpar** as memórias financeiras consulte a página 10.

9.1. Prazo e taxa na mesma unidade de tempo

Antes de sair fazendo cálculos, vamos aprender a modificar a **unidade de tempo** do prazo e da taxa pois os princípios da matemática nos diz para deixá-los na **mesma unidade**.

Conceitos financeiros:

Juro comercial: o ano possui 360 dias (cada mês: 30 dias)
Juro exato: o ano possui 365 dias, bisexto 366 e os meses são exatos com 31, 30, 29 ou 28 dias (fevereiro)

A taxa de juro sempre está relacionada à uma unidade de tempo: dia, mês, ano etc. Lemos a taxa de juro em forma percentual, ou seja, "x"% (ao dia, ao mês, ao ano) mas lembre-se que podem ser escritas de forma decimal:

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Portanto, a taxa tem variação linear em função do tempo. Se tivermos que converter a taxa mensal em anual, basta multiplicar por 12. Se tivermos que converter a taxa mensal em diária, basta dividir por 30 e valem as operações inversas.

	Dias	Meses	Ano
Convenção	360	12	1
	30	1	1/12 ano

9.2. Juros simples

É o valor pago unicamente sobre o **capital inicial** sendo diretamente proporcional a esse capital e o tempo em que está aplicado. Ou seja, são acréscimos somados ao capital inicial no fim da aplicação. É representado pela fórmula:

$$\boxed{J = PV.i.n}$$

J é o **Juros**
PV é o **capital inicial**
i é a **taxa de juro**
n é o **tempo**

Assim a simbologia fica estabelecida em porcentagem e devemos sempre mencionar a unidade de tempo (12% ao ano ou 2% ao mês etc).

Devemos lembrar ainda que é chamado de **Montante**, a soma do Capital inicial + Juros do período.

Exemplo 1 - Uma pessoa lhe empresta R$ 420,00, a juros simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 1,5% ao mês. Quais os juros produzidos?

Capital inicial (PV) = R$ 420,00 → Aplicando a fórmula:
Tempo (n) = 3 meses **J = PV.i.n**
Taxa (i) = 1,5% ao mês ou 0,015 J = 420 . 0,015 . 3

J = R$ 18,90 de juros em 3 meses

Veja que, se fizermos a conta mês a mês, o valor do juros será de R$ 6,30 por mês. Esse valor, somado mês a mês, não muda.

Na HP 12C:

Digite o número de dias (3 meses = 90 dias)	90 n 12×	Tanto faz a ordem
Digite a taxa anual (1,5% ao mês = 18% ao ano)	18 i 12÷	
Digite o capital inicial	420 CHS DATE PV CFo	

Note que a tecla CHS é pressionada antes para mudar o sinal e então memorizá-lo. Procedimento necessário devido à convenção de sinais de fluxo de caixa, aplicado principalmente em juros compostos.

Para exibir os juros ordinários acumulados	f INT i 12÷	18.90
Para exibir o montante (capital inicial + juros)	+	438.90

O Montante à ser devolvido após 3 meses será **R$ 438,90.** Ou seja, **R$ 420,00** (capital inicial) **+ R$ 18,90** (juros do período).

A HP 12C calcula automaticamente juros simples ordinários (360 dias/ano, comercial) e exatos (365 dias/ano), simultaneamente. É possível mostrar qualquer um dos dois.

Para exibir os juros exatos acumulados	R↓ GTO x⇄y x≷y	18.64

Para trocar somente um número dos registros financeiros basta memorizar o novo número. Os outros não se alteram.

Exemplo 2 - Imagine que aplicou R$ 518,00, a juros simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 4,28% ao mês. Quanto resgatará ao final do período?

Capital inicial (PV) = R$ 518,00
Tempo (n) = 3 meses
Taxa (i) = 4,28% ao mês ou 0,0428

Calcule o número de dias

3	ENTER LSTx	30	×	90	n 12x
meses		dias/mês		3 meses em dias	memoriza

Calcule a taxa anual

4,28	ENTER LSTx	12	×	51,36	i 12÷
ao mês		meses = ano		ao ano	memoriza

Digite o capital inicial/valor da aplicação

518	CHS DATE	PV CFo
	muda sinal	memoriza

Para exibir os juros ordinários acumulados: f | INT i 12÷ | 66,51

Para exibir o montante (capital inicial + juros): + | 584,51

Tira-teima pela matemática convencional:

$$\boxed{J = PV.i.n}$$

$$J = \underset{PV}{518} \;.\; \underset{\text{Taxa 4,28\%}}{0{,}0428} \;.\; \underset{\text{tempo}}{3} = \underset{\text{juros}}{\mathbf{66{,}51}} + \underset{PV}{518} = \underset{\text{Montante}}{584{,}51}$$

Se fizermos a conta por mês, o juros será R$ 22,17.

518 | ENTER LSTx | 4,28 | % INTG | 22,17

9.3. Juros compostos

São acréscimos somados ao capital ao final de cada período de aplicação gerando com esta soma um novo capital. É o famoso **juros sobre juros** cobrado por praticamente todo o comércio lojista. É representado pela fórmula:

$$\boxed{FV = PV.(1 + i)^n}$$

FV é o **Montante/Valor futuro**
PV é o **capital inicial**
i é a **taxa de juro**
n é o **tempo**

Acompanhe a tabela abaixo mostrando a evolução do juros compostos sobre o capital inicial R$ 1.000,00 acompanhado mês à mês por 6 meses à uma taxa de 8% ao mês:

Tempo	Capital	Índice	Montante		Novo Capital
Mês inicial	1.000,00	8% por mês	1.000,00	+(PV . 0,08)	Novo Capital
1º Mês	1.000,00	8% por mês	1.000,00	+ 80	1.080,00
2º Mês	1.080,00	8% por mês	1.080,00	+ 86,4	1.166,40
3º Mês	1.166,40	8% por mês	1.166,40	+ 93,31	1.259,71
4º Mês	1.259,71	8% por mês	1.259,71	+ 100,77	1.360,48
5º Mês	1.360,48	8% por mês	1.360,48	+ 108,83	1.469,31
6º Mês	1.469,31	8% por mês	1.469,31	+ 117,54	1.586,85

O juro é aplicado sempre sobre o montante do mês anterior ou novo capital. A cada mês um novo capital é gerado.

Aplicando $\boxed{FV = PV . (1 + i)^n} \rightarrow FV = 1000 . (1 + 8\%)^6$

$1000.(1+0,08)^6 \rightarrow 1000.(1,08)^6 \rightarrow 1000.1,58687 =$ **1.586,87**

Agora, veja como fica simples na HP 12C:

Digite o tempo | 6 | n (12×)

Digite a taxa | 8 | i (12÷)

Digite o capital inicial | 1000 | CHS (DATE) | PV (CFo)

Tanto faz a ordem

Para exibir o montante | FV (Nj) | 1586,87

Observe que o prazo está compatível com a taxa, ou seja, na mesma unidade de tempo. Quando não estiver, ajustaremos.

Exemplo 1 - Você aplicou R$ 2.500,00, com taxa prefixada de 1,09% ao mês. Precisou resgatar depois de 2 meses.

Capital inicial (PV) = R$ 2.500,00
Tempo (n) = 2 meses
Taxa (i) = 1,09% ao mês

Digite o tempo | 2 | n (12×)

Digite a taxa | 1,09 | i (12÷)

Digite o capital inicial | 2500 | CHS (DATE) | PV (CFo)

Tanto faz a ordem

Para exibir o montante | FV (Nj) | 2.554,80

Exemplo 2 - Você almeja ter a quantia de R$ 5.000,00 daqui 6 meses. Quanto deverá aplicar na poupança, sabenda que a taxa prefixada para o rendimento mensal está em 1,02%?

Montante (FV) = R$ 5.000,00
Tempo (n) = 6 meses
Taxa (i) = 1,02% ao mês

Digite o <u>tempo</u>	6	[n 12x]
Digite a <u>taxa</u>	1,02	[i 12÷]
Digite o <u>montante</u>	5000	[CHS DATE] [FV Nj]
Para exibir o <u>capital inicial</u>	[PV CFo]	4.704,63

Exemplo 3 - Determine uma <u>taxa anual equivalente</u> à taxa composta de 1,5% ao mês?

Por cento (PV) = 100
Tempo (n) = 12 meses
Taxa (i) = 1,5% ao mês

Mesma unidade

Digite o <u>tempo</u>	12	[n 12x]
Digite a <u>taxa</u>	1,5	[i 12÷]
Digite o <u>capital inicial</u>	100	[CHS DATE] [PV CFo]
Para exibir o <u>montante</u>	[FV Nj]	119,56
Retirando o PV	[RCL] [PV CFo] [+]	19,56 % a.a.

Tanto faz a ordem

9.4. Conversão linear

A HP 12C faz cálculos de juros conforme o regime de capitalização composta para períodos inteiros e capitalização simples para períodos fracionários. Para alternar para o regime de capitalização composta pressione as teclas STO e EEX ΔDYS. Aparecerá no visor um "c" no canto inferior. Agora basta repetir a operação.

Exemplo 1 - Emprestei de um banco R$ 800,00 por um prazo de 2,5 anos à uma taxa de 40% ao ano. Quanto pagarei?

Capital inicial (PV) = R$ 800,00
Tempo (n) = 2,5 anos —— Note que o período é fracionário
Taxa (i) = 40% ao ano

Digite o tempo	2,5	n 12x	Taxa e prazo em "anos"
Digite a taxa	40	i 12÷	
Digite o capital inicial	800	CHS DATE, PV CFo	
Para exibir o montante	FV Nj	1.881,60	

Veja que, como o prazo (tempo) está na forma francionária (2,5), a HP 12C considerou o regime de capitalização simples. Pressione as teclas STO e EEX ΔDYS e repita a operação para o regime de capitalização composta. Resultado: 1.855,28

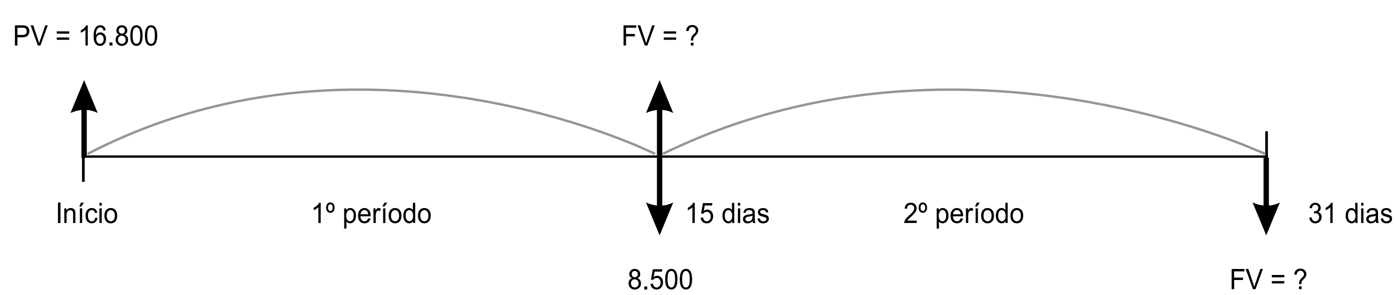
9.5. Fluxo de caixa

O fluxo de caixa apresenta os cálculos financeiros em uma "linha do tempo" (representação gráfica) que facilita a visualização das entradas e saídas de valores.

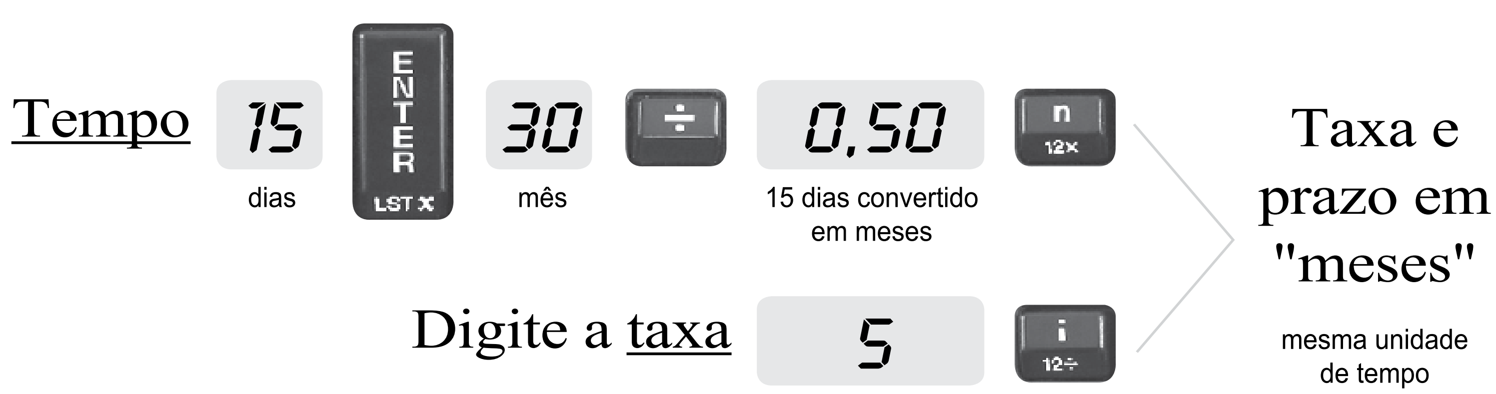
Definida a unidade de tempo (dias, meses, anos), setas para cima (entrada) e para baixo (saída) indicam a movimentação de valores.

Exempo 1 - Uma empresa fez um empréstimo de R$ 16.800 pelo prazo de 31 dias, a uma taxa de 5% ao mês. Depois de 15 dias fez um pagamento de R$ 8.500. Qual será a dívida no vencimento?

Capital inicial (PV) = R$ 16.800,00
Tempo (n) = 31 dias
Taxa (i) = 5% ao mês



Primeiramente calculamos o montante da dívida até o dia 15.



Capital inicial 16.800 CHS PV

Para exibir o montante FV 17.220,00

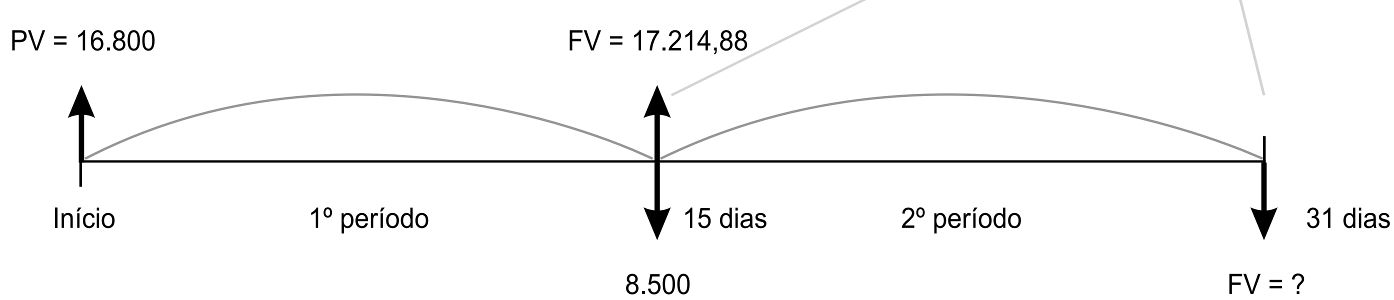
Não esqueça: como o prazo (tempo) está na forma francionária (0,5), a HP 12C considerou o regime de capitalização simples. Pressione as teclas STO e EEX e repita a operação para o regime de capitalização composta. Correto: 17.214,88

O montante (FV) no 15º dia é de R$ 17.214,00. Portanto, deste valor devido, devemos descontar o pagamento feito neste dia, que és de R$ 8.500,00.

Saldo devedor no 15º dia = R$ 17.214,88
Pagamento no 15º dia = R$ 8.500,00
R$ 8.714,88

17.214,88 ENTER 8.500,00 − 8.714,88

Com o saldo devedor de R$ 8.714,88, calcularemos o novo período em que esse saldo passa a ser nosso novo valor presente ou capital inicial (PV) e o período 16 dias restantes.



Saldo remanescente (PV) = R$ 8.714,88
Tempo (n) = 16 dias
Taxa (i) = 5% ao mês

Tempo [16] (dias) [ENTER / LST X] [30] (mês) [÷] [0,53] (15 dias convertido em meses) [n / 12x]

Prazo fracionário, aperte [STO] e [EEX / ΔDYS] para capitalização composta.

Digite a taxa [5] [i / 12÷]

Saldo remanescente [8.714,88] [CHS / DATE] [PV / CFo]

Para exibir o novo montante [FV / Nj] [8.944,63]

O novo montante (FV) no 31º dia será de **R$ 8.944,63**.

Observação: Não se esqueça de usar a convenção de sinais ao memorizar PV, PMT e FV. Valor recebido (seta para cima) com valor positivo, valor pago (seta para baixo) com valor negativo.

Se precisar transformar a unidade de tempo mensal/anual para prazo ([n / 12x]) e taxa de juros ([i / 12÷]), a HP 12C lhe dá um atalho. Se os juros são com capitalização mensal:

Digite o número de anos, calcule e memorize com [g] [n / 12x]

Digite a taxa anual, calcule e memorize apertando [g] [i / 12÷]

Outras teclas para fluxo de caixa são:

f | IRR FV Nj | (*Internal Rate of Return*) ou taxa interna de retorno

f | NPV PV CFo | (*Net present Value*) ou valor presente líquido

g | PV CFo | Fluxo de caixa no momento "zero"

g | PMT CFj | Fluxo de caixa de ordem j (sendo j = 1, 2, 3, ... , n)

g | FV Nj | Número de períodos em que o valor CFj se repete

9.6. Valor presente líquido

Se $\boxed{FV = PV \cdot (1+i)^n}$, então $\boxed{PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n}}$

Calcular o valor presente significa extrair da prestação a taxa de juros nela embutida, lembrando que cada uma vence em um período diferente, portanto juros embutidos diferentes para cada período.

Exempo 1 - Você financiou uma reforma de R$ 16.800 em 4 parcelas mensais de R$ 2.800, R$ 4.000,00, R$ 6.000,00 e R$ 6.000,00. Qual foi a taxa de juros aplicada?

Fluxo de caixa no momento zero (CF_0) = R$ 16.800,00
Parcela 1 (CF_j) = R$ 2.800,00
Parcela 2 (CF_j) = R$ 4.000,00
Parcela 3 (CF_j) = R$ 6.000,00
Parcela 4 (CF_j) = R$ 6.000,00

Digite o <u>momento zero</u> 16.800,00 CHS DATE g PV CFo

Digite a <u>1ª parcela</u> 2.800,00 g PMT CFj

Digite a <u>2ª parcela</u> 4.000,00 g PMT CFj

Digite a <u>3ª parcela</u> 6.000,00 g PMT CFj

Digite quantas vezes a parcela anterior se repete 2 g FV Nj

Para exibir a <u>taxa de retorno</u> f IRR FV Nj 4,12 %

A taxa de juros aplicada foi de **4,12%**.

Exemplo 2 - Em um financiamento de R$ 5.000,00 por 1 ano à taxa de 1,5% ao mês, sendo que a primeira prestação foi paga antecipadamente, qual o valor das prestações?

Prestação antecipada significa "entrada" no ato do financiamento. Para usar o teclado financeiro com "entrada" (*begin*), ative g 7 BEG e desative g 8 END (*end*) quando as prestações forem postercipadas (maior parte das operações bancárias). Note que o visor mostra BEGIN, caso ativado.

Ative a <u>"entrada"</u> g 7 BEG → BEGIN no <u>visor</u>

Digite o <u>Tempo</u> 1 g n 12x 12 → Taxa <u>mensal</u> pede tempo em <u>meses</u>

ano | . 12 e memoriza | 1 ano convertido em meses

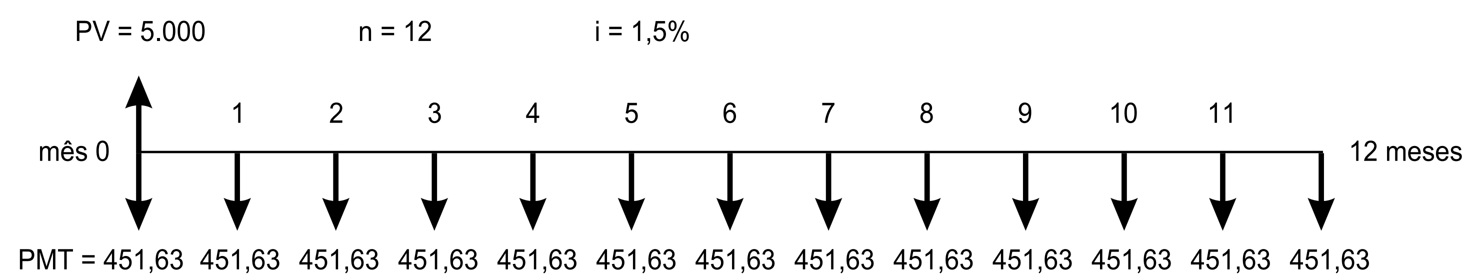
Digite a taxa 1,5 i 12÷

Digite o capital inicial 5000 CHS DATE PV CFo

Para exibir o valor das prestações PMT CFj 451,63

Desative a "entrada" g 8 END → BEGIN some do visor

Para entender melhor o que aconteceu, acompanhe o gráfico do fluxo de caixa do exemplo anterior:



Obs.: Utilizando BEGIN, você não precisa descontar a parcela de entrada, porém, deve informar a quantidade de parcelas, incluindo a entrada. BEGIN só é usado em prestações iguais, ou seja, quando a parcela de entrada for igual às demais.

Se a 1ª parcela foi paga no ato, podemos interpretar que foi financiado R$ 5.000,00 menos a entrada R$ 451,63. Portanto os juros incidem sobre R$ 4.548,37. Se não utilizarmos BEGIN, o tira-teima fica:

Digite o Tempo 11 n 12x , a prestação 451,63 PMT CFj

menos a entrada

e o capital 4.548,37 CHS DATE PV CFo e veja a taxa i 12÷ 1,5

menos a entrada

10. Tipos de erro e o que significam

Visor	Tipo	Exemplo
Error 0	Operações Matemáticas	Divisão por zero, etc.
Error 1	Registradores de Armazenamento	Estouro da capacidade.
Error 2	Registradores Estatísticos	Componente estatístico errado.
Error 3	Registradores Financeiros	Várias taxas internas de retorno.
Error 4	Memória	Programa extenso ou erro de programação.
Error 5	Registradores Financeiros	Excesso ou falta total de CHS no Registrador Financeiro.
Error 6	Registradores de Armazenamento	Registradores estourados, programas extenso.
Error 7	Registradores Financeiros	Excesso ou falta total de CHS nos Fluxos de Cx.
Error 8	Calendário	Entradas de datas indevidas
Error 9	Testes de Circuito, Visor e Teclado.	Problemas com a eletrônica, visor ou teclado.
Pr Error	Memória	Perda irreparável da memória contínua.

11. Emulador da HP 12C no computador

Se não pretende investir na aquisição da HP 12C pode emular seu funcionamento. Procure por emuladores da calculadora financeira, instale e experimente em seu próprio computador. O visual e o funcionamento é o mesmo da HP 12C física.